

Opelt, F. W.

Allgemeine Theorie der Musik auf den Rhythmus der Klangwellenpulse gegründet und durch neue Versinnlichungsmittel erläutert ein Lehrbuch für höhere Bildungsanstalten, sowie zum Selbstunterricht für Freunde der Akustik und Tonkunst

Leipzig 1852

4 Mus.th. 1176

urn:nbn:de:bvb:12-bsb10527647-7

4 Mus.th.

1176

4 Mus. fh. 1176

<36615469130018

<36615469130018

Bayer. Staatsbibliothek



4. Mus. Th. 1846

Allgemeine
Theorie der Musik

auf den Rhythmus der Klangwellenpulse gegründet

und

durch neue Versinnlichungsmittel erläutert.

Ein Lehrbuch

für höhere Bildungsanstalten, so wie zum Selbstunterricht für Freunde
der Akustik und Tonkunst.

Von

F. W. Opelt,
Königl. Sächs. Geheimen Finanzrath.

Mit drei lithographirten Tafeln

Leipzig, 1852.

Verlag von Joh. Ambr. Barth.

75. 13.

Allgemeine

Theorie der Musik

auf den Rhythmus der Klangwellenpulse gegründet

von

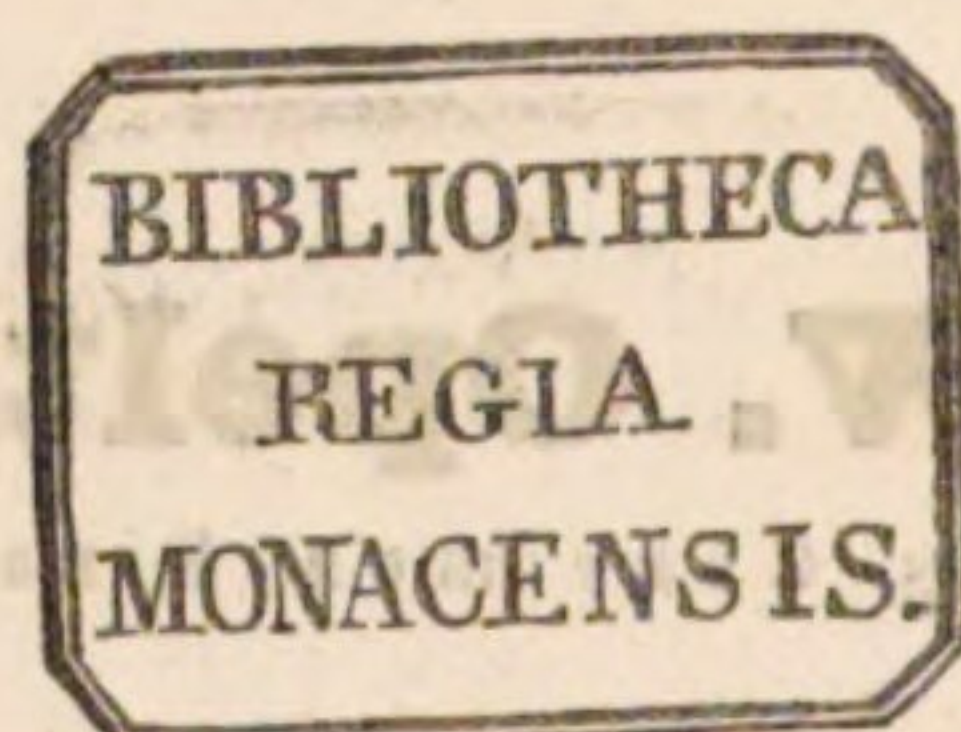
durch neue Versuchsmittel erläutert

Ein Lehrbuch

für höhere Bildungsanstalten, so wie zum Selbstunterricht für Freunde

der Akustik und Tonkunst

Von



Mit drei lithographirten Tafeln

Leipzig, 1853.

Verlag von Joh. Ambros. Barth

Vorwort.

Sobald man gefunden hatte, dass den einzelnen Tönen unserer modernen Dur- und Moll-Tonleiter bei naturgemässer Reinheit der Intervalle folgende Schwingungs- oder Pulsverhältnisse zukommen:

C	D	E ^b	E	F	G	A ^b	A	B	H	c
1	$\frac{10}{9}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{16}{9}$	$\frac{9}{5}$	2

und dass mithin

der Octave	das Pulsverhältniss	$\frac{2}{1}$,
der Quinte	" "	$\frac{3}{2}$,
der Quarte	" "	$\frac{4}{3}$,
der grossen Terz	" "	$\frac{5}{4}$,
der kleinen Terz	" "	$\frac{6}{5}$,
etc.	etc.	etc.

angehöre, musste der blosser Anblick dieser Zahlen sogleich auch auf die Vermuthung führen, dass die Wohlgefälligkeit der Zweiklänge und der musikalischen Accorde überhaupt, von der grösseren oder geringeren Einfachheit der Schwingungs- oder Pulsverhältnisse der zusammen erklingenden Töne abhängig sei. Warum aber mit dem mehr oder weniger einfachen Pulsverhältnisse auch ein mehr oder minder wohlgefälliger Klang nothwendigerweise verbunden sein müsse, oder welcher weitere Zusammenhang zwischen diesen Zahlenverhältnissen und den ihnen angehörigen Erscheinungen im Gebiete des Klanges obwalte, war bisher auf befriedigende Weise noch nicht erklärt. Zwar wurde schon von *Sulzer* in seiner „Untersuchung über den Ursprung der angenehmen und unangenehmen Empfindungen“ (siehe dessen vermischte Schriften 1r Theil 2te Aufl. S. 70) nach dem Vorgange *Euler's* die durch untereinandergestellte Punctreihen versinnlichte Aufeinanderfolge der dem Accord C E G c angehörigen Klangwellenpulse genauer betrachtet, jedoch nur so viel daraus geschlossen, dass diese Schläge eine sehr regelmässige und zugleich auch ziemlich mannichfaltige Progression machten, die mithin intellectuelle Schönheit habe; das, was der Seele in der undeutlichen Vorstellung durch die Sinne gefalle, sei ihr auch dann noch wohlgefällig, wenn man es dem Geiste deutlich vorstellen könne; so einfach nämlich jene Pulsfolge auch sei, so sei sie doch schön und erwecke dem Geiste eine angenehme Empfindung u. s. w. *Sulzer* blieb also ebenfalls bei dem blossen Anschauen des Bildes jener Regelmässigkeit und Mannichfaltigkeit stehen. In *Chladni's* Akustik §. 9 so wie in den Lehrbüchern der Physik überhaupt findet man im Wesentlichen nur angeführt, dass man die mehr oder mindere Einfachheit der Tonverhältnisse als die Ursache des Consonirens oder Dissonirens anzusehen habe. *Rousseau* (Dict. de mus. art. consonnance pag. 180) verwarf sogar diese Lehre und schenkte der von *M. Estève* aufgestellten, seitdem jedoch ebenfalls widerlegten Hypothese seinen Beifall, nach welcher die Ursache der Consonanz in dem übereinstimmenden Zusammenklingen der den consonirenden Tönen angehörigen gleichartigen Sons harmoniques bestehen sollte. Auch Dr. von *Baer* (Vorlesungen über Anthropologie, Königsberg 1824, Seite 284 fg.) glaubte jene Lehre der Physiker bezweifeln zu müssen und in den Lehrbüchern der Musik pflegte sie meistens ganz übergangen zu werden. In

der That darf es auch nicht befremden, wenn jene schöne Entdeckung bisher meistens nur das Eigenthum des Physikers blieb. Offenbar ist diess nur jenem Mangel der Theorie und insbesondere dem Umstande beizumessen, dass aus der Anschauung der blossen Pulsverhältnisse, abgesehen von der Schwerfälligkeit ihrer Behandlung, eine klare und umfassende Uebersicht der Intervalle und ihres Zusammenhanges unter einander theils nur mit grosser Mühe, theils gar nicht zu erreichen war. Rechnet man noch hinzu, dass wir in der practischen Musik jene theoretischen Verhältnisse ohne erheblichen Nachtheil für das Consoniren der Intervalle anscheinend sehr merklich abändern können, ja zum Theil abändern müssen, dass ferner mehrere Versuche, aus jenen Verhältnissen die Natur der Harmonie überhaupt und den Ursprung der practischen Tonleitern zu erklären, misslangen, so kann es nicht auffallen, wenn die Musiker, und unter ihnen selbst die geachtetsten Theoretiker jene Lehre für unfruchtbar und dem Practiker entbehrlich erklärten (Dr. *Weber*, Allgemeine Musiklehre, 3te Aufl. S. XXXI. fg.) Wenn nun aber bei der vollständigsten Uebereinstimmung aller Beobachtungen mit der Theorie wenigstens darüber, dass die Genauigkeit jener Pulsverhältnisse eine unerlässliche Bedingung der vollkommenen Reinheit der zugehörigen Klänge sei, ein Zweifel durchaus nicht weiter obwalten konnte, so musste es auch wohl für die Wissenschaft wie für die Kunst gleich wünschenswerth erscheinen, den weiteren Zusammenhang, welcher hiernach zwischen diesen Zahlenverhältnissen und den ihnen angehörigen Erscheinungen im Gebiete des Klanges stattfinden musste, zu erklären.

Nachdem ich mich längere Zeit hindurch mit jener Frage beschäftigt und mir endlich die Ordnung, in welcher die von consonirenden Tönen erzeugten Pulse, jenen Schwingungsverhältnissen gemäss, der Zeit nach aufeinanderfolgen mussten, durch Zeichnung versinnlicht hatte, führte auch die genauere Betrachtung dieser Ordnung sofort zu der Wahrnehmung, dass aus der Vereinigung der den wohlgefälligen Zweiklängen angehörigen Pulsreihen eine, schon im Gebiete des Zählbaren angenehme rhythmische Aufeinanderfolge oder Gruppierung der Pulse entstehet, und diess musste dann auch sogleich weiter die nahe liegende Vermuthung erzeugen, dass das Con- oder Dissoniren der Zweiklänge und der Accorde überhaupt von jener Gruppierung der Tonpulse oder von dem mehr oder minder angenehmen Rhythmus abhängen werde, welcher aus der Vereinigung der den Accord bildenden Klangpulsreihen (Töne) in der Aufeinanderfolge der einzelnen Pulse nothwendigerweise entstehen musste. Bei fortgesetzter Untersuchung bestätigte sich auch diese Hypothese allenthalben und namentlich an der §. 64 beschriebenen Sirene auf eine so überzeugende und interessante Weise, dass ich mich veranlasst fand, den allmählig angewachsenen Stoff zu ordnen und die mathematische Intervallenlehre mit dieser neuen fruchtbaren Hypothese dergestalt in Verbindung zu bringen, dass das Eine dem Andern zugleich zur Erläuterung und Begründung dienen konnte. Dabei suchte ich dann zugleich auch noch das Verständniss über die Grösse und den Zusammenhang der Intervalle durch Einführung einfacher hierzu vorzugsweise geeigneter Logarithmen, so wie durch bildliche Scalen zu erleichtern, überhaupt die Elemente der Musik so deutlich zu entwickeln und darzustellen, dass das Wesen derselben in seiner bewundernswürdigen Einfachheit möglichst leicht und klar übersehen werden könne. [So entstand die vorliegende „Allgemeine Theorie der Musik“. Sie wurde schon im Jahre 1830 grösstentheils vollendet, bereits zu Anfang des Jahres 1832 in No. 9 der Allgemeinen Leipziger musikalischen Zeitung vorläufig angezeigt, und im December 1832 von mir selbst auf Unterzeichnung angekündigt. Wegen unzureichender Theilnahme unterblieb jedoch damals die Herausgabe derselben und ich machte in einem gedrängten, im Jahre 1834 bei *Herrmann* und *Langbein* in Leipzig in Commission erschienenen Auszuge „Ueber die Natur der Musik“ nur die Grundzüge jener Theorie bekannt. Bald darauf wurden meine Mussestunden durch veränderte amtliche Verhältnisse anderwärts in Anspruch genommen, so dass ich, ungeachtet der freundlichen und beifälligen Aufnahme, welche dem nurgedachten Auszuge von mehreren Seiten, unter andern auch in der „Neuen Leipziger Zeitschrift für Musik 3r Band No. 31“ zu Theil wurde, von der Herausgabe jener Theorie fürerst ganz absehen musste. Von Zeit zu Zeit war ich jedoch bemüht, der Darstellung bei möglichster Kürze eine immer grössere Deutlichkeit und Vollständigkeit zu geben. Hierbei nun zu der Ueberzeugung gelangt, dass ich gegenwärtig kaum noch Etwas hinzuzufügen im Stande sein würde, und in der Hoffnung, dass die Darstellung mit ihren neuen Hülfsmitteln das Studium der mathematischen Intervallenlehre und damit die nähere Kenntniss des so höchst interessanten Tongebiets schon in ihrem jetzigen Zustande wesentlich werde erleichtern können, habe ich jetzt mit deren Bekanntmachung nicht länger Anstand nehmen wollen. Ich übergebe daher dieselbe hiermit dem Publicum mit dem Wunsche, dass sie ihrer Bestimmung entsprechen möge, und erlaube mir in Bezug auf ihre Einrichtung nur noch Folgendes erläuternd zu bemerken.]

Aus den der Physik angehörigen Lehren vom Schalle habe ich nur so viel aufgenommen, als für die Begründung und das Verständniss der allgemeinen Theorie der Musik unentbehrlich schien. Wer sich hierüber weiter unterrichten will, wird insbesondere in dem classischen Werke der Gebrüder *Ernst Heinrich* und *Wilhelm Weber* „Wellenlehre auf Experimente gegründet oder über die Wellen tropfbarer Flüssigkeiten mit Anwendung auf die Schall- und Lichtwellen, Leipzig 1825“ so wie in *Gehler's* physikalischem Wörterbuche, neu bearbeitet von *Brandes, Gmelin, Horner, Littrow, Muncke, Pfaff*. Leipzig 1825—1845, in den Artikeln: Schall, Wellen, Undulation, Interferenz etc., vollständige Belehrung und zugleich Nachweisung weiterer Quellen finden. Wo es sich dagegen um Darstellung und Anwendung der Intervallenrechnung handelte, bin ich mehr in das Einzelne eingegangen, weil hiervon das richtige und vollständige Verständniss alles Weiteren abhing. Hier und da habe ich selbst das minder Wesentliche z. B. die Andeutungen über die symmetrischen Mittelpunkte des Quart- und Quintintervalles §. 61. die Paragraphen 76 bis 78 über die Benutzung der logarithmischen Linie zu Versinnlichung der Verhältnisse der Längen und Durchmesser der Saiten unsrer musikalischen Scalen und zu Construirung der einfachen Intervalle, die nähere Beleuchtung der enharmonischen Tonleitern §. 81 und §. 82 und der *Kirnberger'schen* Scala §. 91 beibehalten, weil solches, ohne den Vortrag auf eine störende Weise zu unterbrechen, zu besserer Uebersicht des Ganzen doch auch mit beitragen konnte. Das §. 79 mit aufgenommene Bild, die Tonsäule, schien mir als vollständigster Schematismus, als eine Vereinigung der bildlichen Versinnlichungsmittel den Schluss der letztern wohl bilden zu dürfen.

Vornehmlich ging ferner meine Absicht auch mit auf die Untersuchung der jedenfalls sehr interessanten Frage, ob unser jetziges practisches Tonsystem, die 12stufige gleichschwebend temperirte Tonleiter, einer weitem Vervollständigung durchaus unfähig sei und die ausübende Kunst sich für immer damit werde begnügen müssen, oder ob und welche Hoffnungen auf Einführung einer noch reicheren Tonleiter genährt werden könnten. Wie nun schon zu richtiger Beurtheilung des Werths unserer practischen Scala eine genauere Vertrautheit mit den musikalischen Intervallen erforderlich ist, so war es insbesondere für jenen Zweck ganz unerlässlich, die Intervalle und die Art und Weise sie zu messen und zu vergleichen, noch weiter als es gewöhnlich zu geschehen pflegt, zu entwickeln, und es ist daher die Behandlung des Stoffs hauptsächlich auch aus diesem Gesichtspunkte mit zu beurtheilen. Das Ergebniss dieser Untersuchung war (§. 86 und §. 95), dass die Anwendung einer reicheren Tonleiter wenigstens bei Instrumenten mit fester Stimmung keineswegs ganz ausserhalb der Grenzen der Möglichkeit liege, indem eine 19stufige gleichschwebend temperirte Scala den Forderungen des Gehörs in Bezug auf Wohlgefälligkeit ebenfalls noch entsprechen würde. Die empfindliche Quinte würde zwar bei dieser Scala um $\frac{6}{1000}$ Octave unter sich schweben, daher nach dem Urtheile *Marpurg's*, welcher (Versuch über die musik. Temperatur. Breslau, 1776, §. 182 und §. 209) für die Grenze der zulässigen Quintenabweichung bloss $\frac{2\frac{1}{2}}{12}$ pythagorisches Comma (= $4\frac{1}{8}$ Tausendtheil Octave in unsern Ausdrücken) annahm, für unbrauchbar zu halten sein. Es scheint jedoch, dass diese Grenze noch etwas weiter gezogen werden könne, indem die Quinten der gleichschwebend temperirten 19stufigen Scala auf der Sirene, auf welcher sie genau dargestellt werden können, etwas Unleidliches keinesweges an sich tragen. Diese Scala verdient daher wohl noch eine weitere Prüfung, da sie im zulässigen Falle unserer so hoch ausgebildeten Kunst und Technik ein ganz neues Feld darbieten würde.

In §. 67 sind die Data angegeben, nach welchen man die 12- oder 19stufige temperirte Scala auf die Sirene zeichnen kann. Bei deren Berechnung sind zwar die Pulsverhältnisse der Töne nur in 4-stelligen Zahlen angenommen worden; indess reicht diess hin, um die Intervalle auf der Sirene bis auf $\frac{1}{1000}$ Octave genau zu erhalten.

Die Lehre von den Accorden umfasst nur wenige Paragraphen, und man könnte sie deshalb vielleicht als zu kurz behandelt ansehen. Bei genauerer Erwägung wird man jedoch finden, dass sie alle dahin gehörigen Elemente nachweist und mehr durfte meiner Ansicht nach daselbst nicht aufgenommen werden, wenn nicht die harmonische Akustik ihre Grenzen (vergl. §. 105) überschreiten wollte. Das Weitere gehört der Kunst an.

Im Laufe des Vortrags habe ich nur selten Veranlassung gehabt, auf frühere Schriften über die mathematische Intervallenlehre zu verweisen; ich glaube daher ausser den vorstehend angezogenen hier wenigstens noch

der folgenden erwähnen zu müssen: *Euler*, Tentamen novae theoriae musicae. Petrop. 1739. 4.; *Sauveur*, Principes d'Acoustique et de Musique, Par. 4. einzeln vorkommend in den Mem. de l'Acad. des Sciences de Paris v. J. 1701, 1702, 1707, 1711 und 1713; *Kirnberger*, Construction der gleichschwebenden Temperatur, Berlin, 1760; *Marpurg*, historisch-kritische Beiträge zur Aufnahme der Musik, Vr Band, 6s Stück.

Nicht ohne Grund besorge ich endlich, dass die vorliegende Schrift hinter den Erwartungen zurückbleiben werde, welche durch die günstigen Beurtheilungen ihres Vorläufers, meiner Abhandlung „Ueber die Natur der Musik“ hervorgerufen worden sein könnten. Es gereicht mir aber jene lebhaft Theilnahme bewährter Kenner zugleich wieder insofern zur Beruhigung, als sie Zeugniß giebt, dass das dem Gegenstande an sich eigenthümliche Interesse die Mängel in der Darstellung desselben gern übersehen lässt.

Dresden, am 24. Januar 1852.

Der Verfasser.

Inhaltsverzeichniss.

1stes Capitel. Allgemeine physikalische Betrachtungen über den Schall.

I. Ursache des Schalles	Seite	1
II. Fortpflanzung des Schalles	„	2
III. Mittheilung des Schalles	„	4
IV. Zurückwerfung des Schalles	„	5

2tes Capitel. Gesetze, nach welchen sich die Anzahl der Schwingungen klingender Körper richtet.

I. Allgemeine Bemerkungen	„	6
II. Transversal- oder Quer-Schwingungen	„	7
a) Bei elastischen Stäben von einerlei Materie	„	7
b) Transversalschwingungen der Saiten	„	7
III. Längenschwingungen	„	9
a) In der Luft	„	9
b) An Stäben und Saiten	„	11
IV. Partial- und Combinationstöne	„	12

3tes Capitel. Mathematisch-physikalische Darstellung des modernen Tonsystems.

I. Diatonische Tonleiter	„	14
II. Von den Intervallen und ihrer Berechnung	„	15
a) Berechnung der Pulsverhältnisse	„	15
b) Berechnung der Höhenverhältnisse (Logarithmen)	„	17
III. Enharmonische und chromatische Tonleiter	„	19
IV. Natürliche Tonfolge oder harmonische Tonleiter	„	19
V. Ueber den Zusammenhang der Intervalle	„	20
VI. Aeltere Theilungsarten der Intervalle	„	21
VII. Ueber die verschiedenen Klanggeschlechter	„	21
VIII. Dur- und Moll-Tonleiter	„	22
IX. Von den Con- und Dissonanzen	„	23
X. Ueber die Anzahl und Lage der einfachsten Intervalle	„	30

4tes Capitel. Von den Hilfsmitteln zu Versinnlichung der Theorie.

I. Die Sirene	„	32
II. Monochord, Tonmesser	„	38
III. Bildliche Scalen, Toncurve, Tonsäule	„	40

5tes Capitel. Von den musikalischen Temperaturen.

I. Ueber die Nothwendigkeit derselben	„	43
II. Nähere Prüfung der enharmonischen Tonleiter	„	44
III. Ueber die verschiedenen Arten der Temperaturen	„	45
IV. Theoretische Untersuchung der möglichen gleichschwebenden Temperaturen	„	46
V. Ueber die Grösse der zulässigen Abweichungen von der Reinheit der Intervalle	„	48
VI. Ungleichschwebende Temperaturen	„	50
VII. Gleichschwebende 12stufige Temperatur	„	51
VIII. Gleichschwebende 19stufige Temperatur	„	52

6tes Capitel. Von den Accorden.

I. Theoretische Darstellung der Accorde	Seite 53
II. Graphische Vorstellung der Accorde, Accordmesser	„ 55
7tes Capitel. Von der Auflösung der Dissonanzen und der Ausweichung in andere Tonarten	„ 57
8tes Capitel. Vom Tacte, Rhythmus, Zeitmaasse	„ 61
9tes Capitel. Allgemeine Wiederholung, als Uebersicht des Ganzen	„ 65

A n h a n g.

I. Metronom, Tactmesser	Seite 68
II. Nähere Erläuterung der Flageolettöne oder der sogenannten Sons harmoniques	„ 69
III. Ueber die absolute Anzahl der den Tönen zugehörigen Schwingungen	„ 72
V. Populäre Darstellung der Theorie der Logarithmen, soweit solche zum Verständniss der vorliegenden Schrift nöthig ist	„ 74

Erstes Capitel.

Allgemeine physikalische Betrachtungen über den Schall.

I. Ursache des Schalles.

§. 1.

Alles, was vom Gehör wahrgenommen wird, bezeichnet man überhaupt mit dem Worte Schall, von dessen unzählig verschiedenen Arten man wieder im Allgemeinen Geräusch und Klang unterscheidet. Die Erfahrung lehrt, dass die Ursache des Schalles schnell aufeinanderfolgende Pulse sind, welche von dem auf irgend eine Weise in Schwingungen oder Erzitterungen versetzten schallenden Körper erzeugt und entweder durch ihn selbst oder mit Hülfe anderer Körper auf die später anzuführende Weise bis zum Ohre fortgepflanzt werden.

§. 2.

Nur elastische Körper können in eigentlich schallende Schwingungen gerathen, und es lässt sich der Vorgang auf folgende Weise vorstellen. Durch Stossen, Streichen, Reiben u. s. w. eines elastischen Körpers entsteht eine Veränderung der Lage seiner Theilchen (Molecülen), eine Störung des mechanischen Gleichgewichts, in welchem die auf den Zusammenhang der Theilchen wirkenden Kräfte im Zustande der Ruhe sich befanden; diese Kräfte wirken der störenden äussern Gewalt (und zwar der Erfahrung zufolge dieser äussern Gewalt direct proportional) entgegen und streben also bei nachlassender Gewalt den früheren Zustand der Ruhe wieder herzustellen. Die aus dieser Reaction entstehende rückgängige Bewegung führt aber die Theilchen nicht bloss bis in ihren anfänglichen Ruhepunkt, sondern über denselben auf die entgegengesetzte Seite hinaus und zwar so weit, bis die nunmehr in entgegengesetzter Richtung wirkenden Elasticitätskräfte diese Bewegung wieder aufheben; dann ist eine neue, der vorigen entgegengesetzte Veränderung der Lage der Theilchen (Spannung) entstanden, welche eine der vorigen entgegengesetzte Bewegung erzeugt u. s. f., so dass dieses Hin- und Zurückgehen, Schwingen, unaufhörlich fort dauern würde, wenn nicht die Reibung der Theilchen unter sich und äussere Hindernisse diese Bewegung nach und nach verminderten. Eine mässig gespannte, seitwärts aus ihrer geradlinigen Richtung gezogene und plötzlich losgelassene Saite giebt ein deutliches Bild von dieser Bewegung, so wie auch ein in einen Schraubestock gespannter und auf ähnliche Weise in Schwingungen gesetzter Stab.

§. 3.

Man unterscheidet verschiedene Schwingungsgattungen:

- I. Longitudinal- oder Längenschwingungen, wenn in dem Körper der Länge nach abwechselnd Zusammenziehungen und Wiederausdehnungen Statt finden. Sie kommen vor bei allen Blasinstrumenten, wo nämlich die in der Röhre enthaltene Luftsäule auf diese Weise schwingt; auch lange starre Körper können so schwingen.
- II. Transversal- oder Querschwingungen; sie finden Statt bei fadenförmigen Körpern, Saiten, Stäben u. s. w., und bei membranenförmigen, Pauken- und Trommelfellen, Scheiben, Glocken, Gefässen u. s. w.
- III. Drehende Schwingungen, welche von *Chladni* bloss an Stäben bemerkt worden sind; es dreht sich der Stab oder jeder schwingende Theil desselben abwechselnd rechts und links.

Mehre von diesen schwingenden Bewegungen können zugleich vorhanden sein und sich auch noch mit anderen Bewegungen des schwingenden Körpers und seiner Molecülen auf unendlich mannigfaltige Weise verbinden.

§. 4.

Es ist hier nicht der Ort, zu untersuchen, ob die schallenden Pulse eine unmittelbare Folge der Totalschwingungen des schallenden Körpers seien, oder ob sie von Erzitterungen der einzelnen Theilchen dieses Körpers (Molecular-Erzitterungen) herrühren, und die Totalschwingungen des Körpers bloss als Mittel dienen, um die Molecular-Erzitterungen hervorzurufen und in bestimmten Zeiträumen zu wiederholen, oder mit anderen Worten, ob die Totalschwingungen selbst schallen oder bloss schallerregend und schallunterhaltend auf die eigentlich schallenden Molecular-Erzitterungen wirken, welche letztere schon einer früheren Zeit angehörige Ansicht neuerlich wieder von *Pellissor* (Neues Jahrbuch der Chemie und Physik, Bd. VII. 1833) aufgestellt worden ist. Für unsern Zweck

Ist es hinreichend zu wissen, dass die Anzahl der Pulse sich genau nach der Anzahl der Totalschwingungen richtet; wir haben es bloss mit den Gesetzen zu thun, nach welchen sich die Anzahl dieser Pulse bei einem schwingenden Körper und ihre Wirkung auf unser Gefühl bestimmen und erklären lässt.

§. 5.

Der einfache Puls, das Element des Schalles, bildet bei hinreichender Stärke das was wir Knall nennen. Eine für unser Gehör zusammenfliessende Reihe solcher Pulse aber erscheint als Klang oder als Geräusch, je nachdem die Pulse regelmässig oder unregelmässig aufeinanderfolgen. Die regelmässigen oder die Klangpulsreihen können nun wieder verschieden sein nach Art, Intensität und Anzahl der Pulse. Art und Intensität der Pulse bedingen beziehentlich die Qualität und Stärke des Klanges (§. 7), und die Anzahl der (hier bloss als pendelartig gleichförmig gedachten) Pulse in einer bestimmten Zeit oder ihre Geschwindigkeit *) dasjenige, was wir Höhe oder Tiefe des Klanges nennen. In letzter Beziehung heisst dann der Klang ein Ton, und zwar ein hoher oder tiefer, je nachdem ihm in einer gewissen Zeit mehr oder weniger Pulse angehören oder die Geschwindigkeit der Pulse relativ grösser oder kleiner ist. Ein Ton ist also eine Klangpulsreihe mit blosser Rücksicht auf die Geschwindigkeit ihrer Pulse betrachtet; der Begriff Klang umfasst aber nächst dem auch noch Art und Intensität der Pulse. Daher sagt man richtig, ein Instrument habe einen schönen vollen u. s. w. Klang, unrichtig aber einen schönen u. s. w. Ton.

§. 6.

Unter einer Schwingung verstehen wir einen Hin- und Rückgang (§. 2) oder die Bewegung aus einer Lage der grössten Spannung des Körpers oder seiner Molecülen bis zur nächstfolgenden entgegengesetzten Lage und wieder zurück; die dazu erforderliche Zeit ist dann die Schwingungszeit, und die Weite eines Hin- oder Rückgangs die Schwingungsgrösse (Oscillations-Amplitude). So wie die Schwingungsbogen eines einfachen der blossen Schwere überlassenen Pendels nach und nach immer kleiner werden, ohne dass sich die Schwingungszeit merklich ändert, ebenso vermindern sich auch die Schwingungsgrössen klingender Körper allmähig bis zum Verschwinden, ohne dass die Schwingungszeit sich merklich ändert, daher bleibt auch der zugehörige Klang in Ansehung seiner Höhe unverändert und nur seine Stärke vermindert sich allmähig bis zum Verschwinden, weil mit der Oscillationsamplitude auch das (aus dem Producte „Geschwindigkeit **) in die bewegte Masse“ bestehende) Moment oder die Intensität der Pulse abnehmen muss.

§. 7.

Dass die verschiedene Qualität der Klänge (Saiten-, Trompeten-, Flötenklänge u. s. w.) oder die sogenannte Klangfarbe von der verschiedenen Art oder Form der Pulse (§. 5) abhängt, lässt sich zwar sinnlich deutlich nicht nachweisen, gewiss aber hinreichend befriedigend andeuten. Art und Form der Pulse müssen nämlich wohl offenbar verschieden sein, je nachdem es die Molecüle der pulsirenden oder vibrirenden Körper sind. Diese Pulse sind ferner in den allermeisten Fällen ein vielfach Zusammengesetztes; so vibriren z. B. bei Saiteninstrumenten nicht bloss die Saiten, sondern auch die Resonanzböden, überhaupt alle Theile der Instrumente, bei Messinginstrumenten nicht bloss die in den Röhren enthaltenen Luftsäulen, sondern auch die Röhren selbst und besonders ihre Stützen u. s. w. Ein und derselbe Ton wird also hier gleichzeitig von verschiedenartigen Körpern erzeugt und der Klang ist daher meistens ein Aggregat der von den verschiedenen Bestandtheilen des Instruments erzeugten isochronischen Pulsreihen. Mit ihm verbinden sich ferner auf mannigfaltige Weise verschiedenartige Schälle nach der Art, wie der klingende Körper in Schwingungen versetzt wird. Der Klang einer Saite ist verschieden, je nachdem sie mit dem Violinbogen gestrichen, mit dem Finger geschnellt, mit einem hölzernen, metallenen, oder einem mit Leder, Tuch u. s. w. überzogenen Hammer angeschlagen wird. Hier vermischt sich der aus der Berührung des schwingenden und schwungerregenden Körpers entstehende besondere Schall mit dem Klang des Erstern.

II. Fortpflanzung des Schalles.

§. 8.

Steht der schwingende Körper mit einem anderen elastischen Körper in unmittelbarer Berührung, so pflanzen sich die in ihm erregten Schwingungen auf diesen anderen Körper fort und auch dieser geräth in Schwingung-

*) Siehe Anmerkung bei §. 6.

**) Man unterscheide die Geschwindigkeit der Pulse von der Geschwindigkeit der Molecüle des schwingenden Körpers; letztere wird mit der Oscillationsamplitude nach und nach immer geringer, während die Geschwindigkeit der dadurch erzeugten Pulse die nämliche bleibt, weil diese nur von der Schwingungszeit abhängt, welche unverändert bleibt.

gen, welche der Zeitdauer nach jenen anregenden Schwingungen völlig gleich sein müssen, weil sich sonst durch die Fortpflanzung der Ton ändern müsste. Der Schall kann also empfunden werden, indem das Ohr (oder bei fest verstopften Ohren irgend ein Schädelknochen) mit dem schallenden Körper in unmittelbarer Berührung steht, oder indem sich die ursächlichen Schwingungen durch ein elastisches Mittel bis zum Ohre fortpflanzen. In den allermeisten Fällen ist dieses Mittel die uns überall umgebende atmosphärische Luft; sie ist übrigens keinesweges das einzige schallleitende Mittel, ja sie wird sogar von vielen anderen Körpern sowohl in Ansehung der Stärke als der Geschwindigkeit der Fortpflanzung weit übertroffen. Ein Ohr unmittelbar an das Ende eines langen Balkens gehalten, hört sehr deutlich den Schlag, der mit einem Stecknadelkopfe am andern Ende des Balkens erzeugt wird; an einer 2928 par. Fuss langen eisernen Röhrenfahrt haben *Biot* und *Martin* die Fortpflanzung des Schalles durch das Eisen über 10 mal schneller gefunden, als durch die Luft. Hierher gehören auch die bekannten Erfahrungen über die bessere Fortpflanzung des Schalles durch die Erdoberfläche, indem ein an den Erdboden gehaltenes Ohr Schälle vernimmt, wovon man durch die Luft nichts hört; ferner die an einem Faden gehaltene schwingende Ofenzange, wenn man das obere Ende des Fadens in das Ohr bringt u. s. w. Ist dagegen zwischen dem schwingenden Körper und dem Ohr ein völlig leerer Raum oder ein so wenig elastischer Körper, dass die Pulse nicht die nöthige Intensität haben, um auf die Gehörnerven zu wirken, so wird kein Schall empfunden. Der Wecker einer Uhr wird nicht mehr oder doch nur äusserst schwach noch gehört, wenn er unter einer luftleeren Glocke auf einem wenig elastischen Untersatze steht.

§. 9.

Jeder Schall, Klang u. s. w., er sei stark oder schwach, hoch oder tief, verbreitet sich durch die fortpflanzenden Mittel nach allen Richtungen und zwar auch mit durchaus gleicher Geschwindigkeit, wenn das fortleitende Mittel nach allen Richtungen einerlei spezifische Elasticität hat, wie solches bei der atmosphärischen Luft Statt findet, wenn Mischung und Wärme überall dieselbe ist, indem in grössern oder geringern Höhen die absolute Elasticität und die Dichtigkeit der Luft in gleichem Verhältnisse ab- und zunehmen. Als Beweis dafür dient schon die gemeine Erfahrung, dass man eine Musik in verschiedenen Entfernungen richtig und tactgemäss und auch in den nämlichen Abstufungen des Forte und Piano hört, wie sie das Orchester erzeugte. Den Beobachtungen zufolge durchläuft der Schall in der atmosphärischen Luft bei 0° Temperatur einen Raum von 1020 par. Fuss in einer Sexagesimal-Zeitsecunde, welche Geschwindigkeit für jeden Grad Wärme um 2 par. Fuss zunehmen soll. Weder die Richtung, nach welcher hin der Schall erzeugt wurde, noch die Witterung und Tageszeit verändern diese Geschwindigkeit; ob stetige Strömungen der Luft (Winde) diese Geschwindigkeit abändern, ist mit Sicherheit noch nicht ausgemacht, auch würde die grösste hieraus entstehende Aenderung in unsern Gegenden in 1 Secunde höchstens nur 60 Fuss betragen können, weil die heftigsten Stürme bei uns in dieser Zeit keinen grössern Weg durchlaufen.

§. 10.

Die Stärke des Schalles nimmt mit der zunehmenden Entfernung vom schallenden Körper ab, und zwar aller Wahrscheinlichkeit nach im Verhältniss des Quadrats der Entfernung, so dass der Schall bei 2, 3, 4 mal grösserer Entfernung beziehentlich 4, 9, 16 mal schwächer wird. Die Stärke des Schalles ist ferner verschieden 1) nach Maassgabe der Dichtigkeit der Luft; in erwärmter oder verdünnter Luft ist der Schall schwächer als in comprimierter Luft. Die besondere Stärke des Schalles bei kaltem Wetter hat unter Andern Lieut. *Foster* auf *Parry's* Reisen zu Fort Bowen beobachtet, wo sich derselbe mit seiner blossen Stimme auf 6696 engl. Fuss vernehmlich machen konnte; 2) nach Maassgabe der Richtung, in welcher der Schall erzeugt wurde. Der Ton von Blasinstrumenten, Clarinetten, Hörnern, Trompeten u. s. w. wird in derjenigen Richtung am stärksten gehört, nach welcher hin der Schalltrichter des Instruments gerichtet ist; 3) nach der Richtung des Windes, welcher die Grössen oder die Intensität der Schwingungen zu vermindern oder zu unterhalten scheint, je nachdem er dem Schalle direct entgegen oder mit ihm nach einerlei Gegend geht; 4) nach der Grösse des schallenden Körpers oder überhaupt nach der Intensität der Pulse. Deshalb hört man z. B. von einer Musik in weiter Entfernung nur noch die Bässe. Russische Hornmusik soll man fast eine deutsche Meile weit hören können.

§. 11.

Werden die Schwingungen des schallerzeugenden Körpers plötzlich gehemmt, so wird auch der Schall nicht mehr gehört, woraus folgt, dass die schallleitenden Längenschwingungen der Luft mit den schallerzeugenden Schwingungen zugleich aufhören. Das in einzelnen Fällen vorkommende längere Forttönen gehört dem Nachhalle (§. 13) zu, welcher uns bereits empfundene Schwingungen wieder von Neuem zuführt.

III. Mittheilung des Schalles.

§. 12.

Jeder schallende Körper setzt zugleich alle übrigen im Bereiche seines Wirkungskreises liegende vibrationsfähige Körper mehr oder weniger in Schwingungen, wobei diese Körper die ihrer eignen Beschaffenheit und jener Anregung entsprechenden besonderen Schwingungen machen. Dieses Mitklingen, tonisches Echo genannt, ist am stärksten bei denjenigen Körpern, welche den nämlichen Ton zu geben geeignet sind, wie der ursprünglich in Schwingungen versetzte Körper, weil dann die Schwingungen beider Körper, des erregenden und mitklingenden, gleichdauernd oder isochronisch sind und erstere die letzteren in ihren Excursionen stets unterstützen, während entgegengesetzten Falles die anregenden Schwingungen zugleich wieder mehr oder weniger hemmend wirken. Dieses Mitklingens bedient sich die practische Musik zur Verstärkung des Klanges, und es wird solches dann insbesondere Resonanz genannt. Sind nämlich mehrere vibrationsfähige feste Körper mit einander verbunden, so verbreiten sich die in dem einen Körper erregten Schwingungen augenblicklich über das ganze System und es findet hierbei nach *Savart* das allgemeine Gesetz Statt, dass, wenn die Theile des Systems senkrecht auf einander stehen, die transversalen Schwingungen des einen Theiles in dem auf ihm senkrecht stehenden Theile longitudinale Schwingungen und umgekehrt erzeugen u. s. f., so dass durch diese Abwechselung oder Uebertragung das ganze System in Vibration gesetzt wird. Ist dieses überdem von solcher Beschaffenheit, dass seine Hauptmasse durch Abtheilung in kleinere gleiche Theile, wie später §. 21 klar werden wird, Vibrationen von jeder beliebigen Geschwindigkeit darstellen kann, so wirkt der schwingungerregende Theil auch zugleich tonbestimmend, indem er in allen übrigen Theilen des Systems isochronisches Miterzittern (das Mittönen) hervorruft. So werden z. B. die Schwingungen einer Violinsaite durch die Schwingungen des Steges auf die Resonanzdecke der Violine und von hier durch die Zarge und durch den Stimmstock zwischen Decke und Boden auf den letztern übertragen; diese sämtlichen Schwingungen sind isochronisch, d. h. Steg, Decke, Stimmstock und Boden vibriren eben so schnell wie die anregende Saite. Hierdurch wird nun der ausserdem wenig vernehmliche Ton der Saite ausnehmend verstärkt, weil der mitschwingende Körper der Geige eine viel grössere Anzahl von Luftmoleculen in Schwingungen versetzt, als von der Saite allein hätte geschehen können. Ebenso werden bei röhren- und pfeifenförmigen Instrumenten die Körper derselben durch die in ihnen vibrirenden Luftsäulen, Zungen, Blättchen u. s. w. zum Mittönen gebracht, wie diess aus der verschiedenen Klangfarbe solcher Instrumente ohne Weiteres erhellt.

§. 13.

In der Regel sind es feste oder starre Körper, welche man zu Verstärkung des Klanges anwendet; dass aber auch die Luft hierzu benutzt werden kann, lehrt ein von *Stramford Raffler* aus Ostindien mitgebrachtes Instrument, Gender genannt. Nach *Wheatstone's* Beschreibung besteht solches aus 11 Metallplatten, die in den am leichtesten entstehenden Schwingungsknoten (§. 21) mit zwei Löchern durchbohrt und an zwei durch diese gezogenen Fäden horizontal aufgehangen sind. Unter jeder Platte steht ein auf den Ton der letztern gestimmtes verticales Bambusrohr, was beliebig mit einem Deckel verschlossen oder geöffnet werden kann. Bei gedeckten Röhren geben nun die mit einem kleinen Klöppel angeschlagenen Platten nur einen schwachen und rauhen Ton, bei geöffneten aber einen sehr wohlklingenden, welcher offenbar von den in den Röhren befindlichen Luftsäulen herührt. Auch lässt sich die Resonanz mittelst guter Schalleiter in beträchtlichen Entfernungen vom klangerregenden Körper hervorrufen. Wenn man z. B. auf den Resonanzboden eines im untern Theile eines Gebäudes stehenden Pianoforte einen Metallstab senkrecht aufsetzt, welcher bis in die obern Stockwerke reicht und dort mit dem Resonanzboden eines anderen Instruments in Verbindung gebracht wird, so wird die auf jenem Instrumente gespielte Musik durch den Stab auf dieses obere Instrument übertragen, so dass die Musik aus diesem Instrumente zu kommen scheint, wie *Wheatstone* beobachtet hat. *Pellisov* spannte zu anderem Zwecke die sämtlichen Saiten seines Pianoforte an einer Mauer auf, versah sie mit einer dieser Aufspannung entsprechenden Claviatur und führte vom Stege aus durch die Mauer einen Stab von Fichtenholz, welchen er mit dem im Nebenzimmer stehenden Resonanzboden verband. Während nun der Spieler selbst nur ein leises, kaum vernehmliches Geräusch hörte, erschienen die gespielten Melodien dem Zuhörer im Nebenzimmer sehr deutlich und rein. Diese und andere Beobachtungen zeigen, dass durch eine geeignete Verbindung tonerregender und resonanzfähiger Körper die Klänge bedeutend verstärkt werden können, indem dadurch gleichsam das Instrument selbst vielfach vergrössert wird. *Pellisov* erzählt, dass der Boden des Chores der Studienkirche in München durch eine Bretterbühne etwa um einen Fuss höher gemacht worden sei: dadurch soll sich die Wirkung des Contrabasses auf eine ausgezeichnete Weise verstärkt haben, und der Staub auf dieser Bühne soll, sobald der Contrabass gespielt wird, sich sogleich zu Klangfiguren formen und zwar selbst dann, wenn das ganze Chor mit Menschen angefüllt ist.

IV. Zurückwerfung des Schalles.

§. 14.

Wenn ein vollkommen elastischer Körper *A* Fig. 1 in irgendwelcher Richtung *AF* gegen eine widerstehende Ebene *CD* stösst, so wird er nach *FK* oder so zurückgeworfen, dass der Winkel *AFC* dem Winkel *KFD* gleich ist. Man pflegt diess so auszudrücken, dass der Brechungswinkel dem Einfallswinkel gleich sei. Diess sind die beiden Winkel, welche die Richtung der Bewegung nach und vor dem Stosse mit der, auf die widerstehende Ebene in den Berührungspunct gefällten Perpendicular-Linie macht. In Fig. 1 ist also *AFI* der Einfallswinkel, *KFI* der Brechungswinkel, weil *IF* auf der Ebene *CD* in dem Puncte *F* senkrecht steht. Beide Winkel sind aus geometrischen Gründen ebenfalls einander gleich, wenn die Winkel *AFC* und *KFD* einander gleich sind. Wäre also der Körper senkrecht in der Richtung *IF* gegen die Ebene gestossen worden, so würde er auch in der nämlichen Linie zurückkommen. Die Geschwindigkeit der Bewegung ist übrigens bei vollkommen elastischen Körpern in allen Fällen nach dem Stosse die nämliche wie vor dem Stosse. Beispiele davon geben die von den Banden des Billards zurückgeworfenen Spielbälle, die von spiegelnden Flächen zurückgeworfenen Lichtstrahlen u. s. w. Auf ähnliche Weise können wir uns die Zurückwerfung des Schalles von reflectirenden Flächen vorstellen, woraus sich die Erscheinungen des Halles und Wiederhalles (Echo's) erklären oder doch versinnlichen lassen. Ein Ohr im Puncte *K* wird den bei *A* erregten Schall erstlich durch die Luft in der Richtung *AK* und dann in Folge der Zurückwerfung von der Fläche *CD* in der Richtung *FK* hören. Der Weg *AK* ist stets kürzer als der Weg durch *AF* und *FK*, und zwar um so mehr, je näher *A* und folglich auch *K* dem Puncte *I* stehen. Erinnern wir uns jetzt, dass der Schall bei mittlerer Temperatur oder 15° Wärme in 1 Secunde 1050 par. Fuss durchläuft, und nehmen wir an, dass (wie es beiläufig wirklich der Fall ist) zwischen zwei aufeinanderfolgenden Schällen wenigstens $\frac{1}{9}$ Secunde Zeit verfliessen muss, wenn sie das Ohr noch einzeln und als von einander verschieden empfinden soll, so folgt, dass wir den zurückgeworfenen Schall nur dann noch von dem unmittelbar empfangenen deutlich unterscheiden können, wenn der Weg des ersteren wenigstens $\frac{1050}{9}$ oder ungefähr 116 par. Fuss länger ist als der Weg des letzteren. Will also der Beobachter die eigene Stimme als Echo hören, so muss er wenigstens 58 par. Fuss von der reflectirenden Fläche entfernt sein, weil der Weg hin und zurück wenigstens 116 Fuss betragen muss. Spricht er also in 1 Secunde 9 Sylben gegen eine solche um 58 Fuss von ihm entfernte Fläche, so werden am Ende der 9. Sylbe die ersten 8 Sylben bereits wieder zum Ohre gekommen sein, sich also mit den unmittelbar erregten Lauten vermischt haben, und er wird bloss die letzte Sylbe für sich allein als Echo hören. Wäre aber die Fläche 9 mal 58 oder 522 Fuss von ihm entfernt, so würde er alle 9 Sylben haben aussprechen können, ehe die erste derselben als Echo zurückkommt, und er würde dann in der folgenden Secunde jene 9 Sylben als reines Echo hören. Ist die Entfernung der reflectirenden Fläche kleiner als 58 par. Fuss, so fliessen Schall und Echo immer mehr zusammen und letzteres wird zum blossen Hall. Den Ort, von wo der Schall ausgeht, nennt man das phonische, den Ort, wohin er gebrochen wird, das phonokamptische Centrum.

§. 15.

Wenn daher an einem Orte nirgends reflectirende Flächen vorhanden sind, so hört auch der Schall auf, sobald die Schwingungen des schallenden Körpers aufhören; je mehr aber solche Flächen vorhanden sind und je näher sie stehen, desto nachhaltiger wird der Schall durch den Hall. Das Echo und der Hall sind übrigens nach den Beobachtungen desto stärker, je elastischer die reflectirenden Flächen sind. Daher wird der Klang im Zimmer durch weiche Gewebe, Vorhänge, Fussteppiche u. s. w. merklich geschwächt.

§. 16.

Mehre in verschiedenen Entfernungen liegende reflectirende Flächen, welche geeignet sind, einen Schall nach einerlei Ort hin zurückzuwerfen, müssen nach Vorigem verschiedene aufeinanderfolgende Echo's, oder wenn die Unterschiede der Zeiten kleiner als $\frac{1}{9}$ Secunde sind, einen sich vermischenden und längere Zeit fortdauernden Nachhall erzeugen, woraus sich das Ineinanderfliessen der vom Prediger gesprochenen Worte, so wie der musikalischen Vorträge in manchen Kirchen u. s. w. erklärt.

§. 17.

Vorzüglich starke Echo's werden von hohlen Flächen erzeugt, was daher rührt, dass die hohlen Flächen, ähnlich den Hohlspiegeln, den gebrochenen Schall auf einerlei Punct hin reflectiren und dadurch eine grössere Intensität der Pulse bewirken. Ein Echo dieser Art soll in der Mitte der neuen katholischen Kirche in Darmstadt von der 150 Fuss hohen gewölbten Kuppel erzeugt werden und der reflectirende Schall hier dem direct gehörten gleich sein. Aus diesem Grunde sind auch Schiffssegel zu Erzeugung eines Echo geeignet, ingeleichen Wolken u. s. w.

§. 18.

Ist die hohle Fläche von der Art, dass nicht nur alle aus dem phonischen Centrum ausgehenden Schälle in einerlei phonokamptischem Centrum sich wieder vereinigen, sondern auch zugleich die verschiedenen Wege aller dieser Schälle einander gleich sind, so muss im phonokamptischen Centrum das vollkommenste Echo entstehen. Diese Eigenschaft hat die Ellipse, indem alle aus dem einen Brennpuncte F Fig. 2 an irgend einen Punct der Ellipse treffenden Schälle genau nach dem andern Brennpuncte f hingelenkt werden, auch alle diese Wege wie $FM + Mf$, $FN + Nf$ u. s. w. an Länge einander gleich sind. Denkt man sich die halbe Ellipse $aMNb$ um die Axe ab gewendet, bis MN auf der andern Seite bei m und n wieder in die horizontale Fläche fallen, so hat der Bogen $aMNb$ das elliptische Gewölbe beschrieben, in welchem aus vorigen Gründen alle bei F erzeugten Schälle durch Zurückwerfung bloss in f vernommen werden können. Auf ähnlichen Einrichtungen beruhen die sogenannten Flüstergalerien und Sprachgewölbe.

§. 19.

Die Erfahrung lehrt, dass kegelförmige oder nach der vorderen Seite sich erweiternde Röhren den Schall auf eine sehr beträchtliche Weite in der Richtung der Röhre hin verpflanzen. Man nennt deshalb solche Röhren Sprachröhre, ist jedoch zur Zeit noch nicht zu einer befriedigenden Theorie derselben gelangt. Bloss so viel scheinen die Beobachtungen an die Hand zu geben, dass die Wirkung desto grösser werde, je länger die Röhren sind, auch hat man die konische Form dem Zweck entsprechend gefunden. Mit dergleichen Röhren lässt sich, so viel bis jetzt davon bekannt, die im Freien ungefähr nur auf 800 Fuss weit vernehmliche Menschenstimme bis auf 18000 Fuss Entfernung verständlich erhalten. Röhren, durch welche man einen bedeutenden Theil von den sich kugelförmig ausdehnenden Schallwellen aufzufassen und nach einerlei Punct hin zu richten strebt, nennt man Hör-röhre, deren Theorie ebenfalls noch dunkel ist.

§. 20.

Diese gedrängten allgemeinen Betrachtungen über den Schall werden für den Musiker nicht ohne alles Interesse sein. Wenn der Componist z. B. Echo's darstellen will, darf er nicht gegen die Naturgesetze verstossen, und der Dirigent eines grossen Orchesters wird auf die Beseitigung der Hindernisse Bedacht nehmen müssen, welche die allmälige Fortpflanzung des Schalles der bezielten Einheit des Zusammenwirkens entgegenstellt. Sämmtliche Glieder des Orchesters, Spieler und Sänger, werden sich nicht nach dem was sie hören, sondern nach dem Tactirstabe des Directors im Tacte zu erhalten haben. Will man sehen, wie sich der Schall allmählig fortpflanzt und was daraus entsteht, wenn weit von einander entfernte Personen sich nur nach einem und demselben in verschiedenem Abstände von ihnen erzeugten Schalle im Tacte zu erhalten suchen, so betrachte man eine lange Colonne marschirender Soldaten, welche sich im Marsche nach den an ihrer Spitze befindlichen Trommeln richtet. Jeder Einzelne wird tactgemäss und in Uebereinstimmung mit den Uebrigen zu marschiren glauben, und doch wird die Colonne unaufhörlich hin und her unduliren, das vermeintlich gleichzeitige Auftreten gleichsam wie ein durch alle einzelnen Glieder der Colonne hinlaufendes Arpeggio erscheinen.

Zweites Capitel.

Gesetze, nach welchen sich die Anzahl der Schwingungen klingender Körper richtet.

I. Allgemeine Bemerkungen.

§. 21.

Jeder klingende Körper kann, mit Ausnahme eines oder zweier Puncte, wo er festgehalten wird, in seiner ganzen Ausdehnung schwingen, in welchem Falle dann die Schwingungsart die einfachste und langsamste, der Ton also der tiefste ist, welchen der Körper erzeugen kann. Er kann sich aber auch noch auf sehr mannigfaltige Art in Theile zerlegen, welche dann abwechselnd nach entgegengesetzten Richtungen schwingen, während die Theilungspuncte, Schwingungsknoten genannt, in Ruhe bleiben, ohne von einer besonderen äussern Kraft festgehalten werden zu müssen. Diese Unterabtheilung unterliegt aber dem allgemeinen Gesetz, dass alle diese kleineren Theile in gleicher Zeit ihre Schwingungen vollenden müssen, damit diesseits und jenseits des Knotens Gleichgewicht in der Bewegung Statt finde, weil sonst der Knoten nicht in Ruhe bleiben könnte. Der Körper giebt dann um so höhere Töne, je grösser die Anzahl dieser Theile oder je kleiner jeder solche Theil ist, weil die Schwingungen im Allgemeinen stets schneller werden, wenn der schwingende Körper kleiner wird. Mehrere solcher Schwingungsarten können an einem und demselben Körper zugleich Statt finden und folglich von einem Körper mehrere Töne zugleich er-

zeugt werden. In Folgendem werde ich bloss die Gesetze der Transversal- und Longitudinal-Schwingungen für gerade Stäbe, Saiten und Luftsäulen anführen und zwar auch nur so weit, als sie für den Musiker von besonderem Interesse sein dürften.

II. Transversal- oder Querschwingungen.

a. Bei elastischen Stäben von einerlei Materie.

§. 22.

Für einerlei Schwingungsart verhalten sich hier die Schwingungsmengen direct wie die Dicke und umgekehrt wie das Quadrat der Länge des Stabes; die Breite ändert fast nichts. Ein Stab kann in folgenden sechs Fällen schwingen, wenn nämlich 1) beide Enden fest, 2) bloss angestemmt, 3) völlig frei sind; 4) wenn das eine fest, das andere frei, 5) das eine fest, das andere angestemmt, 6) das eine frei, das andere angestemmt ist. Wir betrachten hier bloss den 3. und 4. Fall. Die einfachste Schwingungsart eines an beiden Enden freien Stabes ad Fig. 6 ist die, wenn sich ungefähr bei b und c zwei Schwingungsknoten bilden; beide freie Enden schwingen dann pendelartig nach gleicher Seite, während der ungefähr doppelt so lange mittlere Theil bc nach entgegengesetzter Richtung wie eine Saite schwingt. Diese Schwingungsart findet bei der sogenannten Strohfiedel Statt, wo Stäbe oder Streifen von Holz, Glas oder Stahl, an ihren beiden Schwingungsknoten auf einer weichen Unterlage ruhend, mit Klöppeln geschlagen werden. Die einfachsten Schwingungen eines an einem Ende festen, am andern Ende freien Stabes sind pendelartig und haben ihre Anwendung an der Eisenvioline gefunden, wo eiserne Stifte, in den halbkreisförmigen Steg eines Resonanzbodens geschlagen, mit einem Violinbogen gestrichen werden. Wird ein solcher Stab bis auf die Hälfte verkürzt, so schwingt er dann 4 mal so oft als vorher; das Viertel 16 mal, das Achttheil 64 mal u. s. w., während der ganze Stab nur einmal schwingt. Chladni hat mit Hülfe dieses Schwingungsgesetzes — indem er einen Stab, dessen einfachste Schwingungen noch zählbar waren, so weit verkürzte, bis die Schwingungen als Ton hörbar wurden — ausgemittelt, dass dem Tone C ungefähr 128 Schwingungen in 1 Zeitsecunde zukommen *). Wir werden später noch genauere Hülfsmittel für diese Beobachtung kennen lernen und finden, dass für dieses C in 1 Secunde mittler Sonnenzeit sehr nahe genau — wenigstens für die Wiener Orchesterstimmung — 132 solche Schwingungen, oder nach unserer §. 6 gewählten Bezeichnung 66 Schwingungen angenommen werden können.

b. Transversalschwingungen der Saiten.

§. 23.

Wenn zwei Saiten von einerlei Materie sind, ihre Längen mit l und l' , ihre Halbmesser mit r und r' , die Gewichte, womit sie gespannt werden, mit p und p' , und endlich die Schwingungsmengen, welche sie in gleichen Zeiten vollenden, mit z und z' bezeichnet werden, so hat man

$$\frac{z}{z'} = \frac{l' r'}{l r} \sqrt{\frac{p}{p'}}.$$

Hieraus folgt:

- I. Bei gleicher Länge und gleicher Dicke ist $\frac{z}{z'} = \sqrt{\frac{p}{p'}}$, d. h. die Schwingungsmengen verhalten sich direct wie die Quadratwurzeln der spannenden Gewichte. Wenn sich also z. B. die spannenden Gewichte an vier gleichlangen und gleichdicken Saiten wie 16, 25, 36, 64 verhielten, so würden sich die Schwingungsmengen dieser Saiten wie 4, 5, 6, 8 verhalten.
- II. Bei gleicher Dicke und gleicher Spannung ist $\frac{z}{z'} = \frac{l'}{l}$, d. h. die Schwingungsmengen verhalten sich dann umgekehrt wie die Längen der Saiten. Wenn man also eine gespannte Saite gerade in ihrer Mitte abtheilt, so schwingt jede Hälfte zweimal, während die ganze Saite nur einmal schwingt; das Drittel würde dreimal, das Viertel viermal, das Fünftel fünfmal u. s. w. so oft als die ganze Saite schwingen.
- III. Bei gleicher Länge und gleicher Spannung ist $\frac{z}{z'} = \frac{r'}{r}$, d. h. die Schwingungsmengen verhalten sich umgekehrt wie die Halbmesser der Saiten, oder die Schwingungsmenge wird in demselben Verhältnisse kleiner, in welchem die Saite dicker wird.

§. 24.

Die Dauer einer Schwingung oder die Schwingungszeit erhält man, wenn man die zu einer gewissen Anzahl Schwingungen nöthige Zeit durch jene Anzahl dividirt, woraus folgt, dass sich die Schwingungszeiten

*) Diess sind bloss halbe Schwingungen, weil Chladni einen blossen Hin- oder Rückgang, wie bei einem Pendel, für eine Schwingung rechnet.

umgekehrt wie die Schwingungsmengen verhalten. Bei gleichdicken und gleichgespannten Saiten verhalten sich also nach §. 23. II. die Schwingungszeiten direct wie die Längen der Saiten; die Schwingungszeit der halben Saite ist halb so gross, als die der ganzen Saite u. s. w.

§. 25.

Der Schwingungsbogen einer Saite kann, wie AaB Fig. 4 in Bezug auf eine durch die Mitte a gedachte senkrechte Linie symmetrisch sein: in diesem Falle kommt die Saite in der Mitte jeder halben Schwingung genau wieder in die gerade Linie, welche sie im Zustande der Ruhe bildete, und der jenseitige Bogen hat wieder die nämliche symmetrische Krümmung. Die Saite kann aber auch in einen beliebigen anderen Bogen wie AMB Fig. 3 gezogen sein: dann nimmt sie auf der entgegengesetzten Seite die zwar gleiche, aber umgewendete Figur BmA an, beim Rückgange wieder die Figur AMB u. s. f. In beiden Fällen sind die Schwingungszeiten und folglich auch die Töne an Höhe einander gleich, was auch die Erfahrung bestätigt, indem der Ton einer Saite der nämliche bleibt, an welcher Stelle man sie auch durch Schnellen, Schlagen oder Streichen in Schwingungen setzen möge.

Den Ton, welchen eine Saite oder überhaupt ein klingender Körper giebt, wenn er seine einfachste Schwingung — von derjenigen Gattung, welche bei der Musik in Anwendung kommt — macht, oder auf diese Weise in seiner ganzen Ausdehnung ohne besondere Unterabtheilungen schwingt, werde ich stets als den, dem Körper angehörigen Grundton bezeichnen.

§. 26.

Zu Abtheilung einer Saite in kleinere Theile ist nach §. 21 erforderlich, dass die Schwingungen aller zusammengehörigen Theile oder die gleichartigen Partialschwingungen gleichdauernd oder isochronisch sind. An einer gleichförmig dicken gespannten Saite müssen daher nach §. 24 alle zu einerlei Abtheilungsart gehörigen Theile von genau gleicher Länge sein, woraus folgt, dass stets eine ganze Anzahl solcher Theile vorhanden sein muss. Es können daher nur dann Partialschwingungen Statt finden, wenn sich die Saite in 2 oder 3, 4, 5, 6, 7 u. s. w. genau gleiche Theile theilen kann. Alle zu einerlei Abtheilungsart gehörigen Theile geben dann auch, wegen der gleichen Dauer der Schwingungen, einerlei Ton. Man findet diess an folgendem Versuche bestätigt. Nimmt man nämlich von einer Saite AX Fig. 4 eine Länge AB , welche in der ganzen Länge der Saite genau aufgeht, oder ein aliquoter Theil derselben z. B. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ u. s. w. von AX ist, und berührt man die Saite bei B nur sehr leise mit dem blossen Finger, so wirkt der in Schwingung gesetzte Theil AB wegen des geringen Hindernisses auch auf die übrige Länge der Saite, und zwar so, dass sich der Rest BX wegen des nöthigen Gleichgewichts in eben solche Theile wie AB eintheilt. Dadurch entstehen dann bei C , D , E Schwingungsknoten, von deren Vorhandensein man sich durch kleine Papierstreifchen (Reiterchen) überzeugen kann, welche auf den Schwingungsknoten in Ruhe bleiben, während sie von den Schwingungsbogen bei a , b u. s. w. sofort abgeworfen werden. Die ganze Saite giebt auch nur einerlei Ton, nämlich den, welcher der Länge AB zukommt, was nicht der Fall sein würde, wenn BX für sich ungetheilt seine Schwingungen machte; auch kann man unbeschadet des Fortklingens der Saite die Stellen C , D , E auf ähnliche Art wie die Stelle B berühren, nicht aber die schwingenden Stellen a , b u. s. w., in welchem letzteren Falle die Saite sofort gedämpft wird. Die aliquoten Theile CD , BC u. s. w. werden übrigens auch noch ihrer Figur nach von dem Bogen AB regulirt, siehe Fig. 3. Es ist endlich gleichgültig, ob man die Saite zwischen A und B oder zwischen irgend zwei anderen Knoten streicht.

§. 27.

Hiernach erklärt sich nun auch folgende Erscheinung. Wenn man eine Saite AB Fig. 5 auf vorgedachte Weise bei C so hemmt, dass AC zu CB sich wie 2 zu 3 verhält, so erscheint weder der dem Theile AC , noch der dem Theile CB angehörige Ton, sondern ein ganz anderer, welcher dem fünften Theile der Saite zukommt. Der Theil AC sucht nämlich des Gleichgewichts wegen von CB bloss die Länge CD in Schwingung zu setzen und bei D einen Knoten zu bilden; es bleibt also der Theil DB übrig, welcher seine eigenen Schwingungen zu machen und gegenheils in CD und CA gleiche Schwingungen zu erzeugen strebt. Da nun auch DB hier gerade ein aliquoter Theil, nämlich die Hälfte von CD oder CA ist, so steht diesem Bestreben kein Hinderniss entgegen und es wird hier die Länge DB der Schwingung bestimmende Theil. Daher entstehen nun auch bei E und F Schwingungsknoten, alle Theile wie AE , FC u. s. w. sind der Länge DB gleich und geben einerlei Ton, nämlich den, welcher $\frac{1}{5}$ der Seitenlänge zugehört.

Verhalten sich nämlich im Allgemeinen die Längen AC und CB in kleinsten ganzen Zahlen wie n zu m , so ist der Schwingung bestimmende Theil $= \frac{1}{n+m}$ von der ganzen Länge der Saite. Soll also z. B.

$\frac{1}{4}$ von der Saite der Schwingung bestimmende Theil werden, so muss $AC=1$, $CB=3$ sein; wenn $\frac{1}{8}$ der tonbestimmende Theil werden sollte, so könnte diess auf zweierlei Art geschehen, nämlich durch $AC=1$ und $BC=7$, oder durch $AC=3$ und $BC=5$.

Hierauf beruht die Erzeugung der sogenannten Flageolet-Töne oder Sons harmoniques, welche wir später (§. 135 ff.) ausführlicher betrachten werden.

III. Längenschwingungen.

a. In der Luft.

§. 28.

Wenn man eine an dem einen Ende verschlossene cylindrische Röhre, z. B. einen hohlen Schlüssel, auf die bekannte Weise zum Tönen bringt, so wird die in der Röhre befindliche Luftsäule in Schwingungen versetzt, indem der an der Oeffnung befindliche dünne Querschnitt (φ) von Luft auf die nächste Schicht, diese auf die folgende u. s. f. bis zum Boden fortwirkt, jede folgende Schicht also immer mehr und mehr verdichtet wird, bis die rückwirkende Elasticitätskraft das weitere Hinstreben der Schichten aufhebt, am Boden die grösste Verdichtung Statt findet und nunmehr alle einzelnen Schichten der Säule gleichzeitig wieder nach der Oeffnung hin gestossen werden. Es erhellt hieraus, dass im Momente dieses Wechsels die verschiedenen Schichten, vom Boden aus gerechnet, sich in einer immer mehr abnehmenden Verdichtung befinden, so dass diese an der Oeffnung Null ist, nämlich die Luft daselbst die Dichtigkeit der umgebenden Atmosphäre behält. Denken wir uns jetzt, dass, bevor noch die Rückwirkung vom Boden aus erfolgt, an die Oeffnung eine andere gleiche Röhre angesetzt worden sei, so dass beide zusammen jetzt eine doppelt so lange an beiden Enden verschlossene Röhre bilden, so wird der Rückstoss die Luftsäule in der zweiten Röhre successiv eben so zusammendrücken, wie es durch die anregende Ursache in der ersten Röhre geschah, und es werden dann im nächsten Moment nach der auf dieser entgegengesetzten Seite Statt gehabten Verdichtung alle Schichten der ganzen Säule gleichzeitig den Rückweg beginnen. Die sämtlichen Luftschichten in der an beiden Enden verschlossenen Röhre werden sich also abwechselnd hin und her nach den beiden Böden zu bewegen und folglich abwechselnde Verdichtungen und Verdünnungen auf beiden Seiten erzeugen, so dass die Dichtigkeit in der Mitte stets constant bleibt und die ganze Luftsäule abwechselnd sich nach dem einen und dem andern Ende hin zusammendrückt.

Ein solcher Hingang und Rückgang in einer an beiden Enden verschlossenen Röhre ist für die Luftsäule das nämliche, was wir §. 6 und §. 22 bei den Querschwingungen der Saiten Eine Schwingung genannt haben. Ist die dazu gehörige Zeit eben so gross, wie die Schwingungszeit bei einer Saite, so muss diese Luftschwingung auch den nämlichen Ton wie die Saite geben.

§. 29.

Es ist nun ferner leicht einzusehen, dass, wenn auch die andere Röhre nicht angesetzt worden wäre, die Wirkung des Rückstosses von dem Boden der ersten Röhre erst völlig vorübergehen muss, ehe bei fortdauernder Anregung ein zweiter Hingang nach diesem Boden erfolgen kann. Jedes Molecül an irgend einer Stelle wird sich in Folge des Rückstosses erst über seinen anfänglichen Standpunct bis zu einem neuen entgegengesetzten Ruhepuncte zurückbewegt haben müssen, und wenn auch die Ausweichung vom anfänglichen Standpuncte hier geringer sein sollte als der erste Hingang nach der entgegengesetzten Seite, so wird doch dieselbe Zeit darauf verwendet werden, eben so wie Saiten oder Pendel nach und nach kleinere Schwingungen machen, ohne dass sich dabei der Ton oder die Schwingungszeit merklich ändert. Hieraus folgt, dass die Oscillationen der Molecüle oder die Schwingungen der Luftsäule in der an einem Ende offenen Röhre die nämliche Geschwindigkeit haben, wie in einer doppelt so langen, aber an beiden Enden verschlossenen Röhre. Beide Röhren würden also einerlei Ton erzeugen, weil die Oscillationen in selbigen völlig isochronisch sind.

§. 30.

Die Länge der Röhre bestimmt ferner — wenn andere gleichzeitig mit schwingende Körper, z. B. Zungen u. s. w., nicht hemmend oder regulirend wirken — zugleich auch die Zeitdauer der Schwingungen oder die Schwingungszeiten (§. 6). Dieselbe Zeit nämlich, welche verfließen muss, ehe in Folge der rückwirkenden Elasticitätskraft der Rückstoss beginnen kann, muss auch, wie beim Pendel, wieder verfließen, ehe die erste Schicht φ wieder in ihre ursprüngliche Stelle gelangt. Diese Schicht hat dann, der Zeit nach, eine halbe Schwingung, nämlich einen halben Hin- und einen halben Rückgang gemacht, was mit einem ganzen Hingange oder mit einem ganzen Rückgange, folglich mit einer halben Oscillation gleichbedeutend ist. Nun muss sich aber offenbar die Geschwindigkeit, mit welcher ein Puls durch die Luft geht, nach der Geschwindigkeit der Fortpflanzung des Schalles im Allgemeinen richten; der Schall aber durchläuft in gleichen Zeiten gleiche Räume, und zwar in der Luft in 1 Sexagesimal-Zeitsecunde bei $+2^{\circ}$ Temp. R. 1024 par. Fuss. Sei also unsere an dem einen Ende verschlossene (sogenannte gedeckte) Röhre $= a = 8$ par. Fuss lang, so wird $\frac{8}{1024}$ oder $\frac{1}{128}$ Secunde auf den halben Hingang und eben so viel auf den halben Rückgang jeder Schicht, folglich in unserm Falle $\frac{2}{128}$ oder $\frac{1}{64}$ Secunde auf die Dauer einer halben Schwingung, mithin $\frac{1}{32}$ Secunde auf die Dauer einer ganzen Oscillation gerechnet werden

müssen. Während einer solchen ganzen Oscillation schreitet der vom Boden der Röhre oder der gedeckten Pfeife zurückkehrende Puls in der freien Luft fort durch eine Strecke $= 4a$, und diese Strecke nennt man die zum erzeugten Tone gehörige Wellenlänge.

Die von einer gedeckten Pfeife erzeugte Luftwelle ist also viermal so lang, als diese Pfeife selbst, mithin der Hingang von der Oeffnung bis zum Boden oder von hier zurück bis zur Oeffnung $\frac{1}{4}$ Oscillation oder $\frac{1}{4}$ Wellenlänge.

Jede neue Oscillation erzeugt eine neue Welle oder einen neuen Puls, deren in unserm Falle nach Verlauf einer Zeitsecunde 32 hintereinanderliegen würden und von welchen der erste bereits am Ende von $32 \times 32 = 1024$ par. Fuss angelangt sein würde. Diese Wellen hat man sich nach §. 9 als sphärische Wellen vorzustellen, weil sich der Schall nach allen Richtungen verbreitet.

§. 31.

Wäre unsere gedeckte Röhre bloss 4 par. Fuss lang, so erhellt, dass die Dauer der durch ihre Länge bedingten Schwingungszeit, mithin auch die erzeugte Luftwelle nur halb so gross wie im vorigen Falle sein würde. Bei 2 Fuss Länge nur $\frac{1}{4}$ mal so gross u. s. w. Die Schwingungsmengen der Luftsäulen in solchen Röhren verhalten sich also umgekehrt wie die Längen dieser Röhren oder auch wie die ihnen zugehörigen Luftwellen.

Gleichlange Wellen geben also einerlei Ton, eine Welle von 4 Fuss (oder überhaupt n Fuss) Länge aber schwingt doppelt so oft als eine Welle von 8 Fuss (oder überhaupt $2n$ Fuss) Länge.

§. 32.

Eine an beiden Enden offene Röhre hat den nämlichen Grundton, als eine halb so lange an dem einen Ende verschlossene Röhre; es müssen also durch beide Röhren Wellen von gleicher Länge bedingt werden. Diess kann nicht anders geschehen, als wenn sich in der Mitte der offenen Röhre ein Schwingungsknoten bildet, welcher die offene Röhre gleichsam in zwei halb so lange an dem einen Ende verschlossene Röhren zerlegt, in welchen dann, nur nach entgegengesetzten Richtungen, die Schwingungen so erfolgen werden, wie in den vorigen §§. für gedeckte Röhren gezeigt wurde, und wie diess auch in der That Statt findet.

Auch erhellt hieraus, dass die Länge der von einer offenen Röhre erzeugten Luftwelle der doppelten Länge dieser Röhre gleich ist.

§. 33.

Da sich die Hälften stets wie ihre Ganzen verhalten, so gilt ferner für jede Gattung von Röhren oder Pfeifen unter sich betrachtet das Gesetz: dass die Grundtöne solcher Röhren von einerlei Art oder die diesen Tönen zugehörigen Pulsmengen sich umgekehrt wie die Längen dieser Röhren verhalten. Eine offene Pfeife von 4 Fuss Länge erzeugt in einer bestimmten Zeit doppelt so viele Pulse, als eine offene Pfeife von 8 Fuss Länge; ihre Grundtöne verhalten sich also wie 2 zu 1. Eben dasselbe gilt für die gedeckten Pfeifen. Vergleicht man aber offene und gedeckte Pfeifen mit einander, so muss man sich aus §. 32 erinnern, dass eine gedeckte Pfeife und eine doppelt so lange offene einerlei Ton geben.

Die Weite der Pfeife hat vornehmlich nur auf die Stärke des Tones, weniger aber auf seine Höhe Einfluss, namentlich dann, wenn die Weite gegen die Länge unerheblich ist; doch müssen die Pfeifen durchgehends gleichweit sein, wenn obiges Gesetz gelten soll. Wenn von drei gleichlangen offenen Pfeifen die eine divergirend, die andere gleichweit, die dritte convergirend ist, so giebt die erstere etwas höhere, die letztere etwas tiefere Töne, als die gleichweite Röhre.

§. 34.

Eine offene Pfeife giebt nach Vorigem ihren Grundton, wenn bloss in ihrer Mitte ein Schwingungsknoten vorhanden ist; es können aber auch 2, 3, 4, 5 und mehre Knoten vorhanden sein. Zwei Schwingungsknoten müssen bei b und c Fig. 6, nämlich dergestalt liegen, dass $ab = cd = \frac{1}{2}bc$; ab und cd wirken dann wie gedeckte Röhren, geben also Luftwellen von der Länge $4ab = 4cd$, im Theile bc aber findet die Bewegung Statt, wie wir sie früher (§. 28) für eine an beiden Enden verschlossene Röhre erklärten; die Schwingungen in diesem Theile bc sind daher mit den Schwingungen in den Theilen ab und cd völlig isochronisch, weil die Länge der Luftwelle $2bc = 4ab = 4cd$ ist. Alle Theile geben also einerlei Ton, welcher sich aber zum Grundton der Röhre wie 2 zu 1 verhält, oder doppelt so oft pulsirt als jener, weil die ihm zugehörige Welle $2bc$ oder $4cd$ gerade nur so lang ist, als die Pfeife selbst, während der Welle des Grundtons nach §. 32 die doppelte Länge der Pfeife zukommt. Bei drei Knoten b, c, d Fig. 7 ist $4ab = 4de = 2bc = 2cd$ die tonbestimmende Wellenlänge, welche, wie die Figur zeigt, $\frac{2}{3}$ der ganzen Länge ae oder $\frac{1}{3}$ der doppelten Länge der Pfeife ist; der Ton verhält sich also zum Grundton wie 3 zu 1. Bei vier Knoten b, c, d, e Fig. 8 ist $4ab = 4ef = 2bc = 2cd = 2de$ die tonbestimmende Wellenlänge, welche $\frac{1}{2}$ der ganzen Länge af oder $\frac{1}{4}$ der doppelten Länge der Pfeife ausmacht; der Ton verhält sich zum Grundton wie 4 zu 1 u. s. w.

Die Pulsmengen verhalten sich also gerade wie die Mengen der vorhandenen Knoten, d. h. wie 1, 2, 3, 4, 5 u. s. w., und es wird daher eine offene Pfeife bei successiver natürlicher Abtheilung in mehre Knoten nur diejenigen Töne geben können, welchen diese Pulsverhältnisse zukommen. Siehe §. 48.

§. 35.

In einer gedeckten Pfeife muss sich die Lage der Knoten darnach richten, dass das Doppelte des zwischen der Oeffnung und dem nächsten Knoten gelegenen Theiles der Pfeife ein aliquoter Theil der übrigen Länge derselben sein muss, weil dieses Doppelte das Maass der halben Luftwelle ist, welches Maass rückwärts bis zum Boden der Pfeife eine ganze Anzahl mal wieder vorkommen muss. Die Abstände der Oeffnung vom nächsten Knoten können daher nur sein $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{11}$ u. s. w., und die Längen der in diesen Fällen Statt findenden Luftwellen werden sich eben so verhalten. Eine gedeckte Pfeife kann daher nur diejenigen Töne geben, welchen die Pulsverhältnisse 1, 3, 5, 7, 9, 11 u. s. w. zukommen.

§. 36.

Nach dem §. 21 angedeuteten Gesetze müssen je zwei solche hintereinanderliegende Luftstrecken in entgegengesetzter Richtung oscilliren, weil sich sonst kein Schwingungsknoten bilden könnte, und es gilt diess für alle möglichen Arten von Unterabtheilungen. Während also, von irgend welchem Knoten an gerechnet, die 1., 3., 5., 7. u. s. w. Strecke hinwärts (positiv) schwingen, ist die Richtung der Bewegung der 2., 4., 6., 8. u. s. w. Strecke entgegengesetzt oder negativ, und wenn diese positiv schwingen, dann gehen jene negativ. An jedem Knoten findet daher abwechselnd ein Gegeneinanderstemmen (grösste Verdichtung) und ein Auseinanderstreben (grösste Verdünnung) der beiden an ihm liegenden Strecken Statt. Je zwei solche Strecken zusammengenommen, oder die Strecke von einer Stelle der grössten Verdichtung bis zur nächsten gleichzeitig vorhandenen Stelle der grössten Verdichtung ist das, was wir bereits früher Eine Wellenlänge (Eine Welle) genannt haben, in ihrer Mitte findet zur selben Zeit grösste Verdünnung Statt, und auf beiden Seiten der letzteren, in der Mitte zwischen ihr und der Stelle der grössten Verdichtung befindet sich ein Punct der mittleren oder unveränderten Dichtigkeit. Eben so kann man auch die Welle von einem Puncte der grössten Verdünnung bis zum nächsten gleichzeitig vorhandenen Puncte der grössten Verdünnung rechnen; es liegt dann zwischen beiden Endpunkten eine Stelle der grössten Verdichtung, und in der Mitte zwischen dieser und jedem verdünnten Endpuncte wieder eine Stelle von mittler Dichtigkeit.

Jede Welle besteht also gleichsam aus 4 Theilen, Phasen genannt.

§. 37.

Da ferner der erzeugte Ton an allen Stellen, wo er gehört wird, in Ansehung seiner Höhe unverändert bleibt, diess aber nur dann Statt finden kann, wenn die Schwingungszeiten der einzelnen Lufttheilchen überall einander gleich bleiben, so müssen auch die zugehörigen Wellen an Länge überall einander gleich sein und nur die Oscillationsamplituden der einzelnen Luftschichten werden mit der zunehmenden Entfernung kleiner werden. Die Stärke eines Schalles hat daher nur auf die Weite, nicht aber auf die Geschwindigkeit der Verbreitung Einfluss. Da endlich die Schwingungszeiten sich direct wie die Längen der Wellen verhalten, so erklärt sich zugleich, warum auch die Höhe und Tiefe der Töne auf die Geschwindigkeit der Fortpflanzung keinen Einfluss hat, indem z. B. die dem höhern Tone gehörige Welle von 4 Fuss Länge in 1 Secunde doppelt so viele vierfüssige Wellen in Bewegung setzt, als die achtfüssige Welle des tiefern Tones Wellen von 8 Fuss Länge.

b. Längenschwingungen an Stäben und Saiten.

§. 38.

Diese Schwingungen kann ein Stab annehmen, wenn er 1) an einem Ende befestigt, am andern frei, 2) an beiden Enden frei, 3) an beiden Enden befestigt ist. Die Gesetze sind hier die nämlichen, wie bei den schwingenden Luftsäulen. Im ersten Falle schwingt der Stab wie die Luft in einer gedeckten Pfeife, die möglichen Töne verhalten sich also wie die ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7 u. s. w.; im zweiten Falle wie die Luft in einer offenen Pfeife, die Töne verhalten sich daher wie die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 u. s. w.; im dritten Falle wie in einer an beiden Enden verschlossenen Pfeife, der Stab kann sich in diesem Falle nach einander in zwei Hälften, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$ u. s. w. theilen, welche abwechselnd gegen und von einander streben, und die Tonfolge ist daher wieder 1, 2, 3, 4, 5 u. s. w., wie im zweiten Falle. Eine Saite ist nichts anderes, als ein an seinen Enden befestigter elastischer Stab, daher für selbige in Betreff der Längenschwingungen das nämliche gilt, was oben beim dritten Falle für Stäbe gesagt wurde. Wie bei Luftsäulen hat auch hier die Dicke des schwingenden Körpers auf die Höhe des Tones keinen sehr erheblichen Einfluss. Bei einerlei Materie verhalten sich die gleichartigen Longitudinal-Töne der Stäbe und Saiten umgekehrt bloss wie die Längen. Grossen Einfluss hat dagegen die Materie der Körper. Die gleichartigen Longitudinal-Töne zweier gleichlangen Stäbe von Silber und Glas (oder Eisen) sind nach *Chladni* fast um eine ganze Octave (§. 42) von einander verschieden. Die Schwingungen werden erzeugt, indem

man den Körper der Länge nach auf den schwingenden Stellen reibt, während er an irgend einem oder an mehreren Knoten festgehalten wird. Die Töne sind übrigens weit höher, meistens auch schärfer und unangenehmer, als die Transversaltöne. Doch sind auch nach diesem Princip musikalische Instrumente gebaut worden, z. B. *Chladni's* Clavicylinder. Die tönenden Stäbe werden hier mittelst einer senkrecht an selbige befestigten Hülfsröhre in Schwingungen gesetzt, indem man bloss letztere reibt.

IV. Partial- und Combinationstöne.

§. 39.

Nach §. 3 und §. 21 können in Folge zufällig anregender Ursachen verschiedene schwingende Bewegungen und verschiedene Unterarten derselben zugleich vorhanden sein. Den Musiker interessirt indess zur Zeit bloss das Beisammensein mehrer Arten von einerlei Schwingungsgattung, oder das gleichzeitige Erscheinen mehrer Transversal- oder Longitudinal-Töne an einem und dem nämlichen Körper. Letztere Erscheinung ist am bekanntesten bei den Transversalschwingungen einer Saite. Sie beruht darauf, dass ein oder der andere aliquote Theil, d. i. die Hälfte, das Drittheil, Viertheil u. s. w. der Saite seine Schwingungen machen kann, während die ganze Saite ihre einfachste Schwingung vollendet; daher können neben dem Grundtone auch noch andere Töne erscheinen, welchen die Schwingungsverhältnisse 1, 2, 3, 4, 5 u. s. w. zugehören. Der tiefste oder der Grundton behauptet sich jedoch hierbei stets so stark vorherrschend, dass die von den Partialschwingungen erzeugten Töne (Partial- oder Nebentöne) nur dem aufmerksamen Ohre vernehmlich sind. Welche Töne diess z. B. für den Grundton *C* sein würden, ist aus §. 48 zu ersehen, woraus zugleich erhellen wird, dass wegen der schnellen Zunahme der Höhe dieser Partialtöne der Grundton an sich sehr tief sein muss, wenn man mehr von jenen Tönen hören will. Aus ähnlichen Gründen kann auch bei Blasinstrumenten, Orgelpfeifen zuweilen mehr als ein Ton erscheinen.

§. 40.

Wenn zwei klingende Körper *N* und *M* zu gleicher Zeit ihre Schwingungen beginnen und letztere sich in kleinsten ganzen Zahlen beziehentlich wie *n* zu *m* verhalten, so wird sich das Zusammentreffen der Anfangspulse stets nach Verfluss derjenigen Zeit *t* wiederholen, während welcher der erste Körper *n* und der andere *m* Schwingungen machte. Man wird also (während jeder solchen Zeit *t*) *n* Pulse vom Körper *N*, *m* Pulse vom Körper *M* und einen aus Combination entstandenen Puls hören, und diese combinirten Pulse werden bei ihrer stets gleichförmigen Aufeinanderfolge die Empfindung eines besonderen Tones erzeugen, dem die Pulszahl 1 zukommt, während den erzeugenden Tönen *N* und *M* die Pulszahlen *n* und *m* angehören. Jenen besonderen Ton nennt man den Combinationston oder auch den *Tartini'schen* Ton, nach dem Namen des Tonkünstlers, welcher diese Erscheinung zuerst mit bekannt machte. Ein Beispiel wird diess noch mehr erläutern. Wenn die gleichzeitig begonnenen Schwingungen der beiden Körper *N* und *M* sich wie 2 zu 3 verhalten, so wird, wie Fig. 9 zeigt, eine bestimmte, diesem Pulsverhältniss $\frac{2}{3}$ zukommende Ordnungsfolge α von Pulsen entstehen, welche Pulsreihe nach Verfluss der Zeit *t* — während welcher *N* seine 2 und *M* seine 3 Pulse gemacht hat — in *b*, *c* .. stets von neuem erscheinen wird. Der Anfang jeder solchen Pulsreihe wird sich wegen des daselbst Statt findenden Zusammentreffens zweier Pulse besonders auszeichnen und einen besonderen Ton erzeugen, welchem in der Zeit *t* nur 1 Puls angehört. Man wird also in diesem Falle drei Töne hören, welchen die Pulszahlen 1, 2, 3 zukommen. Das Experiment kann mit zwei Oboen, Violinen u. s. w. gemacht werden, indem man zwei verschiedene Töne zugleich rein, stark und wohl unterhalten angeben lässt.

Dem Combinationstone kommt hiernach stets die Pulszahl 1 zu, wenn das Pulsverhältniss der Erzeugenden in kleinsten ganzen Zahlen gegeben ist.

Auf ähnlicher Ursache beruhen auch die sogenannten Stösse. Stellen wir uns nämlich vor, dass die eine Saite des Tones *C* von 66 Schwingungen (§. 22) auf einem Pianoforte allmählig tiefer gestimmt werde, so dass dieselbe in 1 Secunde nach und nach nur 65, 64, 63, 62 ... Schwingungen mache, während die andere Saite unverändert 66 mal schwingt, so werden die von den beiden Saiten erzeugten Pulse, wie die Schläge zweier nahe isochronisch schwingenden Pendel, abwechselnd auseinandertreten und wieder zusammenlaufen, und zwar wird dieses Zusammenlaufen bei der Stimmung $\frac{66}{65}$ in jeder Secunde einmal, bei $\frac{66}{64}$ zweimal, bei $\frac{66}{63}$ dreimal u. s. w., nämlich stets so viel mal geschehen, als die Differenz beider Schwingungsmengen beträgt, überhaupt also desto öfter, je weiter die beiden Töne auseinandertreten. Man kann sich diess leicht wie in Fig. 9 versinnlichen, übrigens aber auch schon auf folgende Weise vorstellen. Denken wir uns nämlich eine Linie von beliebiger Länge durch Punkte in 66 gleiche Theile eingetheilt, und bezeichnen wir den Abstand der Punkte von einander oder die Punktweite mit *p*. Theilen wir dann ferner dieselbe Linie durch Striche in 65 Theile, so erhellt, dass die Entfernung der Striche von einander oder die Strichweite $1\frac{1}{65}$ Punktweite betragen, d. h. der erste Strich um $\frac{1}{65} p$ über den 1. Punkt hinausfallen, der 2. Strich um $\frac{2}{65} p$ über den 2. Punkt, der 3. Strich um $\frac{3}{65} p$ über den 3. Punkt, ... der 32. Strich um $\frac{32}{65} p$ über den 32. Punkt, der 33. Strich um $\frac{33}{65} p$ über den 33. Punkt

der 64. Strich um $\frac{64}{3} p$ über den 64. Punct, und der 65. Strich um $\frac{65}{3} p$ über den 65. Punct hinaustreffen wird. Die Striche und Puncte, worunter wir uns nun die Pulse vorzustellen haben, werden also anfangs immer weiter auseinander treten, beim 33. Puncte oder in der Mitte der Linie am weitesten von einander ab stehen und dann sich wieder nähern, bis der 65. Strich mit dem 66. Puncte wieder genau zusammenfällt und dann das Auseinandertreten und Wiederzusammenlaufen von Neuem beginnt. Theilen wir weiter jene Linie durch Striche bloss in 62 Theile, so ist die Strichweite $\frac{66}{62} = 1\frac{2}{31}$ Punctweite, d. h. der erste Strich wird um $\frac{2}{31} p$ über den ersten Punct hinaus zu stehen kommen, der 2. Strich um $\frac{4}{31} p$ über den 2. Punct... der 15. Strich um $\frac{30}{31} p$ über den 15. Punct, der 16. Strich um $\frac{32}{31} p$ über den 16. Punct u. s. w. Es wird also der 15. Strich dem 16. Puncte bis auf $\frac{1}{31} p$ nahe kommen, und eben so der 16. Strich bloss um $\frac{1}{31} p$ über den 17. Punct hinaustreten, folglich hieraus die Wirkung entstehen, als ob in der Mitte zwischen dem 16. und 17. Puncte das genaue Zusammentreffen Statt gefunden hätte. Der 17. Strich wird dann um $\frac{3}{31} p$ über den 18. Punct, der 18. Strich um $\frac{5}{31} p$ über den 19. Punct... der 30. Strich um $\frac{29}{31} p$ über den 31. Punct hinaus und endlich der 31. Strich mit dem 33. Puncte genau zusammenfallen, hierauf aber das Auseinandertreten und Wiederzusammenlaufen in derselben Maasse von Neuem beginnen, so dass das dritte Zusammenlaufen zwischen dem 49. und 50. Puncte, und endlich das vierte genaue Zusammentreffen beim 66. Puncte eintreten wird.

Man erhält die Puncte, wo das Zusammenlaufen das erstemal eintreten muss, wenn man mit dem Unterschiede der beiden Pulszahlen in die grössere Pulszahl dividirt. So findet also beim Pulsverhältniss $\frac{66}{65}$ das erste Zusammentreffen erst beim $\frac{66}{66-65}$, d. i. beim 66. Puncte Statt; beim Verhältniss $\frac{66}{64}$ findet das erste Zusammentreffen schon beim $\frac{66}{2}$ oder beim 33. Puncte, und das zweitemal beim 66. Puncte, folglich in der Secunde überhaupt zweimal Statt; bei der Stimmung $\frac{66}{63}$ findet es Statt beim 22., 44. und 66. Puncte, also dreimal in der Secunde; bei der Stimmung $\frac{66}{62}$ viermal, nämlich ein Zusammenlaufen bei 16,5 und 49,5 und ein Zusammentreffen beim 33. und 66. Puncte.

Es gilt diess ferner auch für Bruchtheilsschwingungen. Bei einer Stimmung von $\frac{66}{60,5}$ würde nämlich das Zusammenlaufen in 1 Secunde 5,5 mal, d. h. in 2 Secunden 11 mal erfolgen; bei $\frac{66}{60,25}$ in 1 Secunde 5,75 mal oder in 4 Secunden 23 mal u. s. w. Um sich hiervon zu überzeugen, braucht man sich nämlich im ersten Falle bloss die der Zeit von zwei Secunden angehörigen ganzen Pulse $1\frac{32}{21}$, und im zweiten Falle die der Zeit von vier Secunden angehörige Anzahl ganzer Pulse $2\frac{64}{41}$ vorzustellen. Aus diesem Zusammenlaufen der Klangwellenpulse entstehen neben dem Klange selbst noch besondere zählbare Pulse, welche ebenfalls pendelartig gleichförmig, jedoch, wie aus Vorigem erhellt, immer schneller erscheinen, je weiter die beiden erzeugenden Töne auseinander treten, und diese zählbaren Pulse nun nennt man Stösse, Battemens.

Bei grösserer, nicht mehr zählbarer Geschwindigkeit können diese Stösse unter gewissen Umständen als Ton erscheinen und es ist dann diese Erscheinung dieselbe, welche wir oben unter dem Namen „Combinations-ton“ kennen gelernt haben. Der Erfahrung nach scheinen nämlich nur die aus dem genauen Zusammentreffen der Tonpulse entstehenden Stösse zu Erzeugung eines Combinationstones geeignet, was dann auch mit der oben vorgekommenen Theorie der Combinationstöne vollkommen übereinstimmen würde. So würden also z. B. die Pulse $\frac{66}{62}$ zwar 4 Stösse, aber darunter bloss zwei zu Bildung eines Combinationstones geeignete Pulse erzeugen. Man erinnere sich nämlich, dass jenes Pulsverhältniss $\frac{66}{62}$ zwar ein viermaliges Zusammenlaufen der Pulse, aber darunter nur ein zweimaliges genaues Zusammentreffen erzeugt, übereinstimmend mit jener Theorie, indem, wenn das Verhältniss $\frac{66}{62}$ auf seinen einfachsten Ausdruck $\frac{33}{31}$ reducirt wird, dem daraus resultirenden Combinationstone die Zahl 1 zukommt, dieser Ton also 1 Schwingung macht, wenn der höhere erzeugende Ton 33 mal schwingt, oder jenem 2 Pulse zukommen, wenn dieser deren 66 macht.

Wir werden auf die Combinationstöne §. 68 zurückkommen und interessante Anwendungen der Stösse in den §§. 90 und 144 kennen lernen.

§. 41.

Sei w der Weg des Schalles durch die atmosphärische Luft in 1 Zeitsecunde, s die Anzahl Schwingungen, welche irgend einem Tone x in derselben Zeit angehören, und l die Länge einer offenen Pfeife, welche den nämlichen Ton als Grundton angiebt, so hat man

$$w = 2ls; \quad s = \frac{w}{2l}; \quad l = \frac{w}{2s}.$$

Bei 10° Kälte ist $w = 1000$ par. Fuss. Dem Grundtone einer offenen Pfeife von 10 par. Fuss Länge müssen also bei dieser Temperatur in 1 Secunde $\frac{1000}{2 \cdot 10} = 50$ Schwingungen zukommen. Bei 20° Wärme ist $w = 1060$ par. Fuss; dann würden also dem Grundtone jener Pfeife $\frac{1060}{2 \cdot 10} = 53$ Schwingungen in 1 Secunde zukommen. Hieraus erhellt, warum sich mit der Temperatur der Luft die Höhe der Pfeifentöne ändert. Jene Veränderung von 30° giebt z. B. für einerlei Pfeife zwei Töne, welche sich wie 53 zu 50 verhalten, was, wie wir später finden werden, sehr nahe die Hälfte eines sogenannten grossen ganzen Tones, nämlich 84 Tausendtheilchen einer ganzen Octave

ausmacht. Die Stimmung verschiedener Pfeifen von einerlei Art unter sich wird übrigens dadurch nicht verletzt, weil jeder Ton sich im richtigen Verhältnisse mit verrückt. Pfeifen von 10, 5 und 2 Fuss Länge geben nämlich bei -10° Temp. beziehendlich 50, 100, 250 Schwingungen, und bei $+20^{\circ}$ Temp. beziehendlich 53, 106, 265 Schwingungen, welche sich in beiden Fällen umgekehrt wie die Pfeifenlängen (§. 33), nämlich wie $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{2}$, oder in ganzen Zahlen wie 1, 2, 5 verhalten. Ist ferner die Anzahl der Schwingungen gegeben, welche einem Tone in 1 Secunde zukommen soll, so lässt sich für jede Lufttemperatur die Länge der Pfeife berechnen, welche diesen Ton zum Grundtone hat. So würde z. B. das grosse C, dem nach §. 22 nahe genau 66 Schwingungen in 1 Secunde zukommen, bei 0° Temp. von einer $\frac{1020}{2 \cdot 66} = 7,73$ par. Fuss oder 8 rheinl. Fuss langen offenen Pfeife angegeben werden.

D r i t t e s C a p i t e l .

Mathematisch-physikalische Darstellung des modernen Tonsystems.

I. Diatonische Tonleiter.

§. 42.

Wenn man von einer gespannten Saite nur die Hälfte ihrer Länge schwingen lässt, so ist der erzeugte Ton dem der ganzen Saite so ähnlich, dass man letzteren, nur in einer höheren Region, wieder zu vernehmen glaubt. Ebendasselbe findet bei jeder folgenden Halbierung der Saite Statt. Das Doppelte einer Pulsmenge (s. §. 23. II.) giebt also stets wieder den nämlichen Ton, nur in einer höheren Region, und umgekehrt giebt die Hälfte einer Pulsmenge stets wieder den nämlichen Ton in der nächst tieferen Region. Von dem Grundtone einer Saite an bis zu dem Tone, den ihre Hälfte angiebt, liegen zwar eine unzählige Menge anderer Töne: da man indess zwischen beiden genannten Tönen insbesondere nur noch sechs andere Töne unterschied, welche in ihrer Aufeinanderfolge die wohlgefälligste Scala, die sogenannte reine diatonische Tonleiter, bildeten, so nannte man den Ton der halben Saite die Octave, weil er vom Grundtone (der Prime, Tonica) aus gerechnet, der achte Ton war; die übrigen sechs Töne nannte man ihrer aufsteigenden Ordnung nach: Secunde, Terz, Quarte, Quinte, Sexte, Septime. Diese Benennungen hat man für die Töne, denen sie ursprünglich beigelegt wurden, auch in der Folge beibehalten, obschon in neuerer Zeit noch mehr Töne zwischen der Prime und Octave eingeführt worden sind. Mit dem Worte Octave bezeichnet man dann auch zugleich die ganze Region von der Prime bis zu ihrer 8^{va} . Der Endpunct irgend einer Octavregion ist daher ferner zugleich der Anfangspunct einer neuen ganz ähnlichen Region (Octave), in welcher sich alle Töne der vorigen Octave wiederholen müssen, weil man sich von der Pulsmenge jedes Tones der vorigen Octaven das Doppelte denken kann. Aus diesem Grunde hat man sehr schicklich die für die Töne der einen Octave gewählten Namen auch für die ähnlichen Töne der übrigen Octaven beibehalten und nur folgende Unterscheidungen eingeführt, um zugleich diejenige Octave anzudeuten, innerhalb welcher der bezeichnete Ton liegt:

Stufenzahlen.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	
Tonnamen.	C	D	E	F	G	A	H	grosse Octave.
	c	d	e	f	g	a	h	kleine Octave.
	$\overline{c}$	$\overline{d}$	$\overline{e}$	$\overline{f}$	$\overline{g}$	$\overline{a}$	$\overline{h}$	eingestrichene Octave.
	$\underline{\underline{c}}$	$\underline{\underline{d}}$	$\underline{\underline{e}}$	$\underline{\underline{f}}$	$\underline{\underline{g}}$	$\underline{\underline{a}}$	$\underline{\underline{h}}$	zweigestrichene Octave.

Für jede höhere Octave bringt man einen Strich mehr an, die unter der grossen Octave liegenden Töne aber (Contratöne) werden mit unterstrichenen grossen Buchstaben bezeichnet. Die Stufenzahlen 1, 2, 3 u. s. w. bedeuten Prime, Secunde, Terz u. s. w.; der erste Ton jeder folgenden Region ist zugleich die 8^{va} des Grundtones der vorigen, der zweite die None, der dritte die Decime u. s. w. Bei der Orgel benennt man die Octaven nach der Länge der offenen Pfeife, welche den Grundton der betreffenden Octavregion angiebt; die grosse Octave heisst die achtfüssige, weil dem C eine offene Pfeife von ungefähr 8 Fuss Länge zukommt, die folgenden höheren Octaven heissen dann nach einander 4, 2, 1 . . füssige, die tieferen aber 16, 32 füssige. In Bezug auf den Umfang und die Natur der menschlichen Stimme hat man die Regionen der Töne auch noch in Bass, Baryton, Tenor, Alt, Mezzo Soprano und Soprano eingetheilt, deren gegenseitige Grenzen aber wegen der Verschiedenheit der Stimmorgane nicht genau bestimmt sind.

Nach §. 23. II. lassen sich nun an einer gespannten Saite von gleichförmiger Dichtigkeit und Dicke sehr bequem die Verhältnisse der Pulsmengen beobachten, welche jenen Tönen oder Stufen zukommen. Theilt man nämlich eine solche Saite mit Hülfe eines beweglichen Steges nach und nach dergestalt ab, dass sie die Secunde, Terz, Quarte u. s. w. des ihr eigenthümlichen Grundtones angiebt, so wird man finden, dass der Secunde $\frac{2}{3}$, der

Terz $\frac{4}{3}$, der Quarte $\frac{3}{2}$, der Quinte $\frac{2}{3}$, der Sexte $\frac{3}{5}$, der Septime $\frac{8}{5}$ und der Octave die Hälfte oder $\frac{1}{2}$ von der ganzen Länge der Saite zukommen. Diess gilt für jede Saite, also für jede reine diatonische Tonleiter von irgendwelchem Grundton aus gerechnet. Da sich nun die Pulsmengen umgekehrt wie die Saitenlängen verhalten, so findet man die Pulsverhältnisse für jene Töne, wenn man die Brüche, welche die Saitenlängenverhältnisse angeben, umkehrt oder die Zähler in Nenner und die Nenner in Zähler verwandelt. Die Saitenlängen- und Pulsverhältnisse der Töne in der reinen diatonischen Tonleiter sind also:

Stufen.	Prime.	Sec.	Terz.	Quarte.	Quinte.	Sexte.	Sept.	Oct.
Töne.	C	D	E	F	G	A	H	c
Saitenlängen -	1	$\frac{8}{9}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{2}$
Pulsverhältnisse.	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$	2 oder
	24	27	30	32	36	40	45	48 in ganzen Zahlen.

Gegen die Richtigkeit dieser Zahlenverhältnisse könnte man zwar einwenden, dass sich über die mathematische Genauigkeit jener Theilung der Saite durch das blosse Auge eben so wenig, als über die vollkommene Reinheit des zu beobachtenden Tonverhältnisses durch das Gehör urtheilen lasse; wir werden indess in der Folge finden, dass sie gerade so und nicht anders aus der Natur der Musik entspringen, auch werden sie von allen Beobachtungen auf das Genaueste bestätigt.

II. Von den Intervallen und ihrer Berechnung.

a. Berechnung der Pulsverhältnisse.

§. 43.

Die Höhe der Töne richtet sich zwar völlig genau nach der Menge der Pulse, welche den Tönen in einerlei Zeit zukommen, indess beurtheilt unser Gehör die Abstände der Töne von einander oder den Unterschied ihrer Höhen nicht nach den blossen arithmetischen Unterschieden der Pulsmengen, sondern nach der Grösse der Verhältnisse, in welchen die Pulsmengen der Töne zu einander stehen. Es ist daher für unsern Zweck auch nicht erforderlich, die absoluten Mengen der Pulse zu kennen, welche den Tönen in einer bestimmten Zeit, z. B. in 1 Zeitsecunde, zukommen, sondern völlig hinreichend, wenn man nur jene Verhältnisse anzugeben weiss; man kann daher auch für den Grundton irgendwelche Anzahl von Pulsen annehmen. Da ferner alle Tonverhältnisse, welche man in Bezug auf irgend einen als Basis angenommenen Ton auffindet, auch für jeden andern Ton vorhanden sind, z. B. jede Saite mit $\frac{2}{3}$ ihrer Länge ihre Quinte, mit $\frac{3}{4}$ Länge ihre Quarte u. s. w. giebt, so ist es endlich auch noch gleichgültig, welchen Ton man bei Berechnung der Tonverhältnisse als Basis annehmen will. Man wählt hierzu gewöhnlich das grosse C und setzt seine Pulsmenge = 1; die Pulsverhältnisse der übrigen Töne erscheinen dann entweder als Brüche, oder als höhere ganze Zahlen, welche man ebenfalls als blosse Ton- oder Pulszahlen ansehen kann, weil sie sich auf die Einheit beziehen und folglich ohne Weiteres angeben, wie oft der zugehörige Ton pulsirt, während auf C nur 1 Puls kommt.

Das Verhältniss, in welchem zwei Töne oder zwei Pulsmengen zu einander stehen, heisst überhaupt ein Intervall; die in der Musik gebräuchlichen Intervalle erhalten aber dann wieder besondere Namen, so heisst z. B.

das Intervall $\frac{F}{C} = \frac{32}{24}$ oder $\frac{4}{3}$ eine Quarte, weil der Ton, welcher in Verbindung mit dem Grundtone dieses Intervall darstellt, in jeder von irgend einem Grundtone aus gerechneten reinen diatonischen Tonleiter der 4. Ton

ist; aus ähnlichem Grunde heisst das Intervall $\frac{G}{C} = \frac{3}{2}$ eine Quinte u. s. w. Bei der Berechnung beobachtet man

die Regel, dass man das Intervall als aufsteigend, folglich den tieferen Ton als das erste, den höheren als das zweite Glied des Verhältnisses betrachtet; bekanntlich heisst nun die Zahl, die man erhält, wenn man mit dem ersten Gliede eines Verhältnisses in das zweite Glied desselben dividirt, der Exponent dieses Verhältnisses; man erhält also den Exponenten eines Intervalles, wenn man mit der Pulszahl des tieferen Tones in die des höheren Tones dividirt; er ist stets grösser als die Zahl 1 und giebt an, wie oft der höhere Ton pulsirt, während dem tieferen Tone, mit welchem er verglichen wurde, nur 1 Puls zukommt. Am besten drückt man Intervalle in Bruchform aus, indem man die Pulszahl des höheren Tones als Zähler, die des tieferen als Nenner in einen Bruch zusammenstellt und solchen dann, da nöthig, auf seine einfachste Gestalt bringt, welche dann zugleich der Exponent des Intervalles ist. Sind solche Exponenten einander gleich, so sind es auch die zugehörigen Intervalle. Hieraus wird

nun leicht erhellen, dass $\frac{E}{C} = \frac{30}{24} = \frac{5}{4}$; $\frac{A}{F} = \frac{40}{32} = \frac{5}{4}$; $\frac{H}{G} = \frac{45}{36} = \frac{5}{4}$ gleich

grosse Intervalle, nämlich lauter solche Terzen wie $\frac{E}{C}$ sind; dass $\frac{H}{E} = \frac{15/8}{5/4} = \frac{3}{2}$ und $\frac{c}{F} = \frac{2}{4/3} = \frac{3}{2}$ reine

Quinten, so wie dass $\frac{G}{F} = \frac{3/2}{4/3} = \frac{9}{8}$ und $\frac{H}{A} = \frac{15/8}{5/3} = \frac{9}{8}$ eben solche Secunden wie $\frac{D}{C}$ sind. Aus der

verschiedenen Grösse der Zahlen aber, in welchen diese gleichen Verhältnisse vor der Reduction sich zeigten, kann man nebenbei zugleich erkennen, in welchen Regionen die zugehörigen gleich grossen Intervalle liegen; so ergibt sich z. B. aus $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{4}$, dass diese Terzen auf den Grundtönen C, F und G, oder überhaupt auf Grundtönen erscheinen, deren Pulsmengen sich wie jene Zähler oder Nenner, d. i. wie 30, 40, 45, oder wie 24, 32, 36 verhalten.

Die Intervallenrechnung wird sehr leicht verständlich, wenn man sich, wie es die Natur der Sache auch ohnehin erfordert, unter Tönen stets nur ihre Pulszahlen denkt; man begreift dann leicht, dass ein Ausdruck wie $\frac{E}{C} = \frac{5}{4}$ nichts weiter bedeutet, als dass die Pulsmenge von E zur Pulsmenge von C sich wie 5 zu 4 verhalte, oder dass E fünfmal pulsirt, während C nur 4 Pulse giebt. Jeder solche Bruch giebt also stets mit seinem Zähler die Anzahl Pulse des höheren*) Tones und mit seinem Nenner die Anzahl Pulse des Grundtones an, auf welchen man den höheren Ton bezogen hat. Der Ausdruck $\frac{H}{E} = \frac{3}{2}$ zeigt, dass H dreimal pulsirt, während E nur 2 Pulse macht; vergleicht man aber H mit C, dann hat man $\frac{H}{C} = \frac{15}{8}$, d. h. H pulsirt 15 mal, während C bloss 8 mal pulsirt. Alle Pulsmengen, mit welchen man rechnet, gehören nämlich stets einerlei Zeit an, diese Zeit selbst aber braucht nicht mit bekannt zu sein, weil es bloss auf die Verhältnisse zwischen den Pulsmengen ankommt.

§. 44.

Aus dem Vorigen fliessen nun nachstehende Regeln für die Intervallenrechnung:

1) Addition der Intervalle, d. i. wenn zu irgend einem Tone oder Intervalle ein anderes Intervall aufwärts angefügt werden soll. Regel: Man multiplicirt die Pulszahl des Tones oder den Exponenten des gegebenen Intervalles mit dem Exponenten des anzufügenden Intervalles. Beispiel: Soll zum Tone G oder zur Quinte $\frac{3}{2}$ eine Quarte $\frac{4}{3}$ gesetzt werden, so hat man $\frac{3}{2}$ mal $\frac{4}{3} = \frac{12}{6} = 2$ als Exponenten für das summarische Intervall oder als Pulszahl für den Ton, welcher von G um eine Quarte aufwärts absteht; jener 2 gehört der Ton c oder die 8^{va} von G an.

2) Subtraction, d. i. wenn ein gegebenes Intervall von einem andern Intervalle abgezogen oder einem Tone abwärts angefügt werden soll. Regel: Man dividirt den Exponenten des Minuenden oder die Pulszahl des gegebenen Tones durch den Exponenten des Subtrahenden oder des abzuziehenden Intervalles. Beispiel: Soll vom Tone G oder von der Quinte $\frac{3}{2}$ eine Quarte $\frac{4}{3}$ abwärts genommen oder abgezogen werden, so erhält man $\frac{3}{2} : \frac{4}{3} = \frac{9}{8}$ als Exponenten des übrig bleibenden Intervalles oder als Pulszahl für den Ton D, welcher um eine Quarte von G unterwärts absteht.

Anmerkung. Ist der Subtrahend grösser als der Minuend, so wird der Zähler des Quotienten kleiner als dessen Nenner, d. i. der Ton, auf welchen man kommt, liegt unterhalb des Tones G; z. B. Quarte — Quinte = $\frac{4/3}{3/2} = \frac{8}{9}$, der gefundene Ton pulsirt 8 mal, während G 9 mal pulsirt, und liegt also eine Secunde unterhalb G.

3) Multiplication, d. i. wenn ein Intervall mehrmals zu sich selbst gesetzt oder ein Vielfaches von ihm berechnet werden soll. Regel: Man sucht die so vielste Potenz des gegebenen Intervallsexponenten, als oft dieses Intervall genommen werden soll. Beispiel: Drei Quinten geben ein Intervall von $(\frac{3}{2})^3$ oder $\frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{27}{8}$; zwei Quartan geben $(\frac{4}{3})^2 = \frac{16}{9}$; 12 Quinten geben $(\frac{3}{2})^{12} = \frac{531441}{4096}$; 7 Octaven geben $(\frac{2}{1})^7 = \frac{128}{1}$.

Anmerk. Der Unterschied zwischen 12 Quinten und 7 Octaven ist nach der zweiten Regel = $\frac{531441}{4096} : \frac{128}{1} = \frac{531441}{524288}$ = dem sogenannten Pythagorischen Comma (siehe §. 49).

4) Division oder Untersuchung, wie oft ein Intervall in einem andern Intervalle enthalten sei. Regel: Man sucht diejenige Potenz des Divisors, welche nächst kleiner ist als der Dividend, und dividirt dann mit jener Potenz in diesen Dividenten. Der Quotient ist der Exponent des übrig bleibenden Intervalles, die Potenzzahl (der Potenzexponent) des Divisors aber zeigt, wie oft das dividirende Intervall vollständig im Dividenten enthalten war. Beispiel: Wie oft ist die Terz $\frac{5}{4}$ in der Octave = 2 enthalten? Die Potenzen von $\frac{5}{4}$ sind: 1ste = $\frac{5}{4}$, 2te = $\frac{25}{16}$, 3te = $\frac{125}{64}$, 4te = $\frac{625}{256}$ u. s. w. Letztere ist schon grösser als die Zahl 2, folglich ist hier die 3. Potenz von $\frac{5}{4}$ der Exponent für das nächst kleinere Vielfache der Terz und man hat nun $2 : \frac{125}{64} = \frac{128}{125}$ als Quotienten. In der Octave sind also 3 solche Terzen und eine grosse Diésis (§. 49) enthalten. Drei solche Terzen führen nämlich bloss bis zum Intervalle $\frac{125}{64}$ oder bis zum Tone H $\sharp$ (siehe Tafel I.), und es bleibt das Intervall H $\sharp$ c = $\frac{128}{125}$ übrig.

5) Berechnung des Intervalles zwischen irgend zwei Tönen. Regel: Man dividirt die Pulszahl des höheren Tones durch die Pulszahl des tieferen Tones; der Quotient ist der gesuchte Intervallsexponent. Beispiel: Das Intervall zwischen F und c ist = $\frac{2}{4/3} = \frac{3}{2}$, also eine Quinte.

*) Die etwa vorkommenden Ausnahmen erkennt man ohne Irrthum aus dem betreffenden Vortrage, siehe §. 44, Anmerkung zu Punct 2.

6) Verbindung oder Copulation der Intervalle, d. i. gegebene Verhältnisse durch eine Reihe ganzer Zahlen dergestalt auszudrücken, dass das zweite Glied jedes vorhergegangenen Verhältnisses zugleich auch das erste Glied des nachfolgenden Verhältnisses vorstellt. Sollen z. B. die Verhältnisse $\frac{6}{5}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{4}{3}$ auf diese Weise verbunden werden, so müssen jene ganzen Zahlen die Eigenschaft haben, dass sich die erste zur zweiten wie 5 zu 6, die zweite zur dritten wie 4 zu 5, und die dritte zur vierten wie 3 zu 4 verhalten. Hieraus und aus dem bekannten Satze, dass Verhältnisse nicht geändert werden, wenn man beide Glieder derselben mit einerlei Zahl multiplicirt oder dividirt, ergibt sich daher folgende Regel zur Auffindung jener Zahlenreihe: Man setze die gegebenen Verhältnisse dergestalt unter einander, dass der Nenner des folgenden unter den Zähler des vorigen zu stehen kommt; in die dabei entstehenden leeren Stellen aber setze man rechter Hand den Zähler (das zweite Glied), linker Hand den Nenner (das erste Glied) des in der betreffenden Horizontalreihe stehenden Verhältnisses und multiplicire dann die untereinanderstehenden Zahlen in einander. Z. B. für obigen Fall

$$\begin{array}{cccc} 5 & : & 6 & (6) \\ (4) & 4 & : & 5 \\ (3) & (3) & 3 & : & 4 \end{array}$$

$$60 : 72 : 90 : 120 \text{ oder auf einfachere Zahlen reducirt} \\ 10 : 12 : 15 : 20.$$

Wie hieraus erhellen wird, besteht die Copulation der Intervalle eigentlich darin, dass man die Pulsverhältnisse der Töne, welche die gegebenen Intervalle hintereinander darstellen, in ganzen Zahlen auszudrücken sucht, und man kann also auch auf folgende Weise verfahren: Zu Darstellung der hintereinanderliegenden

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Intervalle} & (\frac{6}{5}) & (\frac{5}{4}) & (\frac{4}{3}) & \text{gehören nach der ersten Regel} \\ \text{die Töne} & 1 & \frac{6}{5} & \frac{3}{2} & 2 \text{ oder} \\ & 10 & 12 & 15 & 20 \text{ in ganzen Zahlen.} \end{array}$$

b. Berechnung der Höhenverhältnisse (Logarithmen).

§. 45.

Es ist sehr oft weniger daran gelegen, das Pulsverhältniss zweier Töne zu kennen, als vielmehr zu wissen, um wie viel diese Töne nach einem leicht fasslichen Maasse an Höhe von einander verschieden sind. Wir folgen hier dem Sprachgebrauch, welcher die Töne nach Höhe und Tiefe unterscheidet und uns gleichsam nöthigt, ein Intervall nur als einen Höhenunterschied oder als einen räumlichen Abstand der Töne von einander zu betrachten. Nun lässt sich zwar mit Hülfe der im vorigen §. dargestellten Intervallenrechnung für jeden gegebenen Fall das Verlangte finden, allein man kommt dabei stets wieder auf blosse Pulsverhältnisse, deren blosse Anschauung in vielen Fällen nicht hinreicht, um eine deutliche Vorstellung von der Grösse des zugehörigen Intervalles zu erlangen; es würde z. B. nicht möglich sein, sich nach dem blossen Pulsverhältnisse $\frac{531441}{524288}$ die Grösse des Pythagorischen Comma zu versinnlichen, und wir bedürfen daher offenbar noch eines einfacheren Maasses, was sich auch aus folgenden Betrachtungen leicht auffinden lässt. Sollen nämlich in einer Tonleiter die Stufen oder die Intervalle zwischen je zwei unmittelbar aufeinanderfolgenden Tönen gleich gross sein, so muss stets der folgende Ton zum nächstvorhergehenden das nämliche Pulsverhältniss haben, wie der zweite Ton zum ersten Tone der Leiter. Sei z. B. die Pulszahl des ersten Tones $= 1$, die des zweiten $= n$ (dieses n kann hier jede beliebige grössere Zahl, also auch jeden Bruch, welcher grösser ist als 1, bedeuten), so ist das Intervall zwischen diesen beiden Tönen $= \frac{n}{1}$ oder $= n$

(§. 44. 5). Folgende Tonleiter wird also lauter gleiche Stufen haben, weil aus der Division irgend einer Pulszahl durch ihre nächstvorhergehende allemal der Werth $= n$ resultirt:

Töne	1 ^{ster} .	2 ^{ter} .	3 ^{ter} .	4 ^{ter} .	5 ^{ter} .	 etc.
Pulszahlen	1.	n .	n^2 .	n^3 .	n^4 .	 etc.
Logarithmen der Pulszahlen.	0;	$1.\log.n$;	$2.\log.n$;	$3.\log.n$;	$4.\log.n$;	 etc.

Werfen wir jetzt einen Blick auf die mit angegebenen Logarithmen der Pulszahlen, so finden wir, dass die Grösse der Intervalle gerade in dem Maasse zunimmt, wie diese Logarithmen wachsen. Ist nämlich ein solcher Logarithmus 2, 3, 4 u. s. w. mal so gross, wie der Log. eines Intervalles x , so sind auch die zu jenen Logarithmen gehörigen Intervalle 2, 3, 4 u. s. w. mal so gross als das Intervall x . Das Gehör beurtheilt also die Höhen der Töne nach den Logarithmen ihrer Pulszahlen, und hierin liegt ein sehr bequemes Hilfsmittel für die Vergleichung dieser Höhen.

Zu diesem Behufe ist zwar jedes Logarithmensystem anwendbar, am geeignetsten aber dasjenige, dessen Basis $= 2$ ist, weil dann der Logarithme der Octave $= 1$ wird, und folglich jedes Intervall sich in Theilen dieser Einheit darstellt. Man erhält diese Logarithmen aus den gewöhnlichen Briggischen Logarithmen, wenn man letztere mit dem Modul 3,321928.. oder, was für unsern Zweck völlig ausreicht, mit 3,322 multiplicirt, z. B. für die

Secunde $\frac{9}{8}$	log. brigg.	$0,05115 \times 3,322 = 0,16992$
Quarte $\frac{4}{3}$	„	$0,12494 \times 3,322 = 0,41505$
Quinte $\frac{3}{2}$	„	$0,17609 \times 3,322 = 0,58497$
Octave 2	„	$0,30103 \times 3,322 = 1,00000$

Ich werde übrigens von den Mantissen der so gefundenen Logarithmen nur die ersten drei Zahlstellen, mit Rücksicht auf die nächst folgende, beibehalten, das Comma weglassen und sie als ganze Zahlen behandeln, oder, was einerlei ist, den Raum oder das Intervall der Octave zu 1000 gleichen Theilen annehmen. Wir haben dann die Höhe jedes Tones oder die Grösse jedes Intervalles bis auf $\frac{1}{1000}$ Octave genau, eine Grenze, welche für die Genauigkeit der Tonmessungen völlig ausreicht *) und zugleich den Vortheil leichter Rechnung und leichter Uebersicht gewährt. Für die meisten Intervalle ist die Genauigkeit noch grösser; wenn wir z. B. für Secunde, Quarte und Quinte künftig beziehentlich die Logarithmen 170, 415 und 585 annehmen, so erhellt, dass wir dabei im Durchschnitt nur um $\frac{5}{100000}$ Octave fehlen.

Diese Logarithmen sind bei der Intervallenrechnung völlig wie die gemeinen Zahlen zu behandeln, z. B.

- 1) Addition. Quarte + Quinte = 415 + 585 = 1000 = der Octave.
- 2) Subtraction. Octave — Quarte = 1000 — 415 = 585 = Quinte. Ist der Subtrahend grösser als der Minuend, so wird der Rest negativ und zeigt an, wie weit der Ton, auf welchen man kommt, unterhalb des Tones C liegt; z. B. Quarte — Quinte = 415 — 585 = — 170, d. h. der gefundene Ton liegt um 170 oder um eine Secunde tiefer als C.
- 3) Multiplication. Zwei Quinten geben 2 mal 585 = 1170, d. i. eine Octave und eine Secunde, nämlich 1000 und 170. Zwölf Quinten geben 7020; sieben Octaven aber bloss 7000, der Unterschied 20 oder $\frac{1}{50}$ Octave ist das Pythagorische Comma.
- 4) Division. Wie oft ist die Quarte 415 in der Octave 1000 enthalten? Man findet zweimal und für den Rest eine Secunde von 170.
- 5) Das Intervall zwischen irgend zwei Tönen findet man aus dem blossen Unterschiede ihrer Logarithmen; zwischen D und G oder zwischen 170 und 585 liegt eine Quarte von 415.
- 6) Verbindung der Intervalle. Die successive Summirung der gegebenen Logarithmen zu dem auf der Höhe 0 stehenden Grundtone giebt die Höhen der Töne, welche jene Intervalle in der verlangten Aufeinanderfolge darstellen, z. B.

	Sec. (170)	Quarte. (415)	Quinte. (585)
Töne 0	170	585	1170
d. i. C	D	G	d.

Unsere Logarithmen sind also die eigentlichen arithmetischen Maasse für die Abstände der Töne von einander, und ich werde sie daher im Folgenden, neben der gewöhnlichen, aus anderen wichtigen Gründen ebenfalls beizubehaltenden Bezeichnung, mit angeben und vorzugsweise überall gebrauchen, wo es auf blosser Vergleichung der Höhen der Töne ankommt.

§. 46.

Sucht man nach Vorigem die Exponenten der Intervalle zwischen je zwei nebeneinanderliegenden Tönen der diatonischen Tonleiter, so findet man, dass diese Exponenten und folglich auch diese Intervalle oder Stufen von verschiedener Grösse sind. Man hat nämlich:

	für C	D	E	F	G	A	H	c
Pulszahlen.	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$	2
Logarithmen.	0	170	322	415	585	737	907	1000
Stufenexponenten.		$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{16}{15}$
Log. der Stufen.		170	152	93	170	152	170	93.

In der diatonischen Tonleiter giebt es also drei verschiedene Stufenarten:

grosse ganze Töne zu $\frac{9}{8}$ oder 170, nämlich	CD, FG, AH;
kleine ganze Töne „ $\frac{10}{9}$ „ 152, „	DE, GA;
grosse halbe Töne „ $\frac{16}{15}$ „ 93, „	EF, Hc.

Giebt man, wie folgende Reihe zeigt,

<u>F</u>	<u>A</u>	C	E	G	H	d
$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{9}{4}$

jedem der drei Töne C, E, G seine Ober- und Unter-Quinte, und vereinigt man dann die so erhaltenen Töne sämtlich in Einer Octave, indem man F und A eine Octave höher, d um eine Octave tiefer setzt, so erhält man eben-

*) Nach §. 90 kann das Gehör kaum bis auf $\frac{2}{1000}$ Octave genau beobachten.

falls die diatonische Tonleiter mit ihren Pulsverhältnissen; sie ist also aus drei aufeinanderfolgenden und ineinandergeschobenen Terz-Quint-Systemen gebildet.

III. Enharmonische und chromatische Tonleiter.

§. 47.

Das Intervall EG, dem der Exponent $\frac{3/2}{5/4} = \frac{6}{5}$ und der Log. $585 - 322 = 263$ zukommt, wird die kleine Terz genannt. Zieht man sie von der nunmehr mit dem Beiwort gross zu belegenden Terz $\frac{5}{4}$ oder 322 ab, so erhält man den kleinen halben Ton, dem der Exponent $\frac{25}{24}$ und der Log. 59 angehören. Dieses neue Intervall 59 hat man jedem Tone der diatonischen Scala sowohl auf- als abwärts angefügt, in der Absicht, eine grössere Mannigfaltigkeit von Grundtönen zu erhalten. Daraus ist eine Reihe von 22 Tönen in der vollen Octave entstanden, welche aus später anzuführenden Gründen (§. 51) die enharmonische Tonleiter genannt wird. Diese neuen Töne werden nach den Haupttönen dergestalt benannt, dass der aufwärts angefügte kleine halbe Ton durch Anhängung der Endigung *is*, der abwärts angefügte durch Anhängung der Endigung *es* an den Buchstaben des Haupttones ausgedrückt wird. Ausnahmen davon sind bloss *as* und *b* statt *aes* und *hes*. Der Kürze wegen werde ich diese *is*- und *es*-Töne resp. durch blosser Anfügung eines $\sharp$ oder $\flat$ (der bekannten Erhöhungs- und Erniedrigungszeichen) an den Buchstaben des Haupttones andeuten und dem eingeführten Gebrauche gemäss ebenfalls B statt H $\flat$ setzen. In Tafel I. sind diese 22 Töne, so wie die Namen und Zeichen, welche sie als Intervalle in Bezug auf den Grundton C erhalten, ferner ihre Pulsverhältnisse in gewöhnlichen Brüchen und in ganzen Zahlen angegeben, auch sind darin die Exponenten der Stufen oder der Intervalle zwischen den nebeneinanderliegenden Tönen in gewöhnlichen und in Decimalbrüchen mit bemerkt, und endlich die Logarithmen der Töne und Stufen mit angegeben worden. Die Saitenlängen ergeben sich durch blosser Umkehrung der Pulsverhältnisse, z. B. für H... $\frac{8}{15}$, für A... $\frac{3}{5}$ u. s. w., wobei die Saitenlänge von C als Einheit gedacht wird.

Man hat verschiedene Arten solcher auf die reine diatonische Scala gegründeten enharmonischen Tonleitern: da wir indess §. 82 und §. 83 finden werden, dass keine derselben practisch anwendbar ist, ja selbst nicht einmal hinreicht, um als vollständige Grundlage für die Harmonielehre gelten zu können, so beschränke ich mich auf jene gewöhnliche Scala als auf ein blosses Hülfsmittel zu besserer Verständlichkeit des Folgenden.

Wären die einzelnen diatonischen Stufen einander gleich, und zwar gerade doppelt so gross, als der auf- und abwärts eingelegte kleine halbe Ton 59, so würden alle $\sharp$ - und $\flat$ -Töne in der Mitte jeder solchen Stufe zusammenfallen; die verschiedene Grösse derselben (§. 46) macht aber, dass die $\sharp$ - und $\flat$ -Töne mehr oder weniger von einander entfernt liegen, nämlich nach Tafel I.

$$C\sharp D\flat = F\sharp G\flat = A\sharp B \text{ um } 52 \text{ oder } \frac{648}{625} \text{ (den Drittheilston)}$$

$$D\sharp E\flat = G\sharp A\flat \quad \quad \quad \text{,, } 34 \quad \quad \quad \frac{128}{125} \text{ (die grosse Diésis)}$$

$$F\flat E\sharp = c\flat H\sharp \quad \quad \quad \text{,, } 25 \quad \quad \quad \frac{3125}{3072} \text{ (die kleine Diésis).}$$

Diess sind die sogenannten enharmonischen Intervalle, zu welchen übrigens auch noch die Stufen $EF\flat = E\sharp F = Hc\flat = H\sharp c = \frac{128}{125} = 34$ zu rechnen sind. Chromatisch nennt man die Tonleiter, wenn die ganzen Töne der diatonischen Scala durch Einlegung des kleinen halben Tones $\frac{25}{24}$ bloss in zwei kleinere Stufen zerlegt werden; sie ist doppelt, je nachdem diese Einlegung auf- oder abwärts erfolgt, nämlich $CC\sharp DD\sharp E\flat FF\sharp GG\sharp AA\sharp Hc$ und $CD\flat DE\flat EFG\flat GA\flat ABHc$. (Vergl. §. 51.)

Aus den Logarithmen der grossen und kleinen ganzen, grossen und kleinen halben Töne und des Drittheiltones ersieht man übrigens, dass diese wörtlichen Bezeichnungen die wahre Grösse der betreffenden Intervalle nur ungefähr, nicht aber genau ausdrücken.

IV. Natürliche Tonfolge oder harmonische Tonleiter.

§. 48.

Natürlich oder harmonisch nennt man eine Tonreihe, wenn die Pulsverhältnisse der aufeinanderfolgenden Töne nach den einfachen ganzen Zahlen 1, 2, 3, 4 u. s. w. fortgehen. Es sind diess nach §. 34 die natürlichen Töne des Horns, der Trompete, überhaupt jeder offenen Pfeife, und man erhält sie, wenn man von einer Saite nach und nach nur $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ u. s. w. ihrer Länge schwingen lässt. Folgende Uebersicht zeigt, in welchen Intervallen eine solche Tonleiter fortschreitet, auch sind zur Erläuterung die Namen der Töne, für den Fall, dass der Grundton der Saite C sei, beigesetzt. Aus den Logarithmen wird man zugleich jetzt erkennen, dass die einem jeden Intervalle zugehörige Höhenzahl auch in den höhern Octaven und zwar in den drei letzten Ziffern jeder Höhenzahl immer wieder erscheint, und die vierte oder vorderste Ziffer die Octave andeutet, über welcher der betreffende Ton liegt. So zeigt z. B. die Höhenzahl 3585 eine Quinte 585 an, welche zunächst über der 3. oder in der 4. Octave liegt u. s. w.

Saiten- längen.	Puls- zahlen.	Intervalle.	Höhen- zahlen.	Töne.	Anmerkungen.
1	1	Grundton.	0	C	
$\frac{1}{2}$	2	1 ^{ste} Octave	1000	c	
$\frac{1}{3}$	3	1 ^{ste} 8 ^{va} der Quinte	1585	$\underline{g}$	
$\frac{1}{4}$	4	2 ^{te} Octave	2000	$\underline{c}$	
$\frac{1}{5}$	5	2 ^{te} 8 ^{va} der grossen Terz	2322	$\underline{e}$	
$\frac{1}{6}$	6	„ „ „ Quinte	2585	$\underline{g}$	
$\frac{1}{7}$	7	„ „ „ kleinsten Septime	2807	$\underline{k}$	um 41 tiefer als $\overline{b}$
$\frac{1}{8}$	8	3 ^{te} Octave	3000	$\underline{c}$	
$\frac{1}{9}$	9	3 ^{te} 8 ^{va} der grossen Secunde	3170	$\underline{d}$	
$\frac{1}{10}$	10	„ „ „ grossen Terz	3322	$\underline{e}$	
$\frac{1}{11}$	11		3459	$\underline{l}$	um 15 tiefer als $\overline{f\sharp}$
$\frac{1}{12}$	12	„ „ „ Quinte	3585	$\underline{g}$	
$\frac{1}{13}$	13		3700	$\underline{m}$	um 37 tiefer als $\overline{a}$
$\frac{1}{14}$	14	„ „ „ kleinsten Septime	3807	$\underline{k}$	
$\frac{1}{15}$	15	„ „ „ grossen Septime	3907	$\underline{h}$	
$\frac{1}{16}$	16	4 ^{te} Octave	4000	$\underline{c}$	

u. s. w.

Die Töne k, l, m kommen in der practischen Musik nicht vor, wir werden sie aber künftig noch bei unsern Darstellungen brauchen, und deshalb obige Benennungen beibehalten. Wegen der Einfachheit der Pulsverhältnisse hat man früher einmal die Tonfolge von $\underline{c}$ bis $\underline{c}$ als die wahre natürliche Tonleiter in Vorschlag gebracht, jedoch ohne gehörige Ueberlegung, weil sie statt der unentbehrlichen Quarten und Sexten die höchst stumpfen und unverständlichen Intervalle $\frac{11}{8}$, $\frac{13}{8}$ geben (über die Wirkung der Pulsverhältnisse $\frac{11}{8}$, $\frac{13}{8}$, und folglich auch ihrer tiefern Octaven $\frac{11}{8}$, $\frac{13}{8}$ siehe §. 54), auch practisch gar nicht ausführbar sein würde (§. 87). Die natürlichste Tonleiter ist sie allerdings in Bezug auf die einfache Aufeinanderfolge der Pulszahlen der Töne, auch sollen? (nach Chladni, Akustik §. 27) die Intervalle $\frac{11}{8}$, $\frac{13}{8}$ in der That in schwäbischen Volksgesängen mit vorkommen; für unsere harmonische Musik ist sie aber aus den bereits angegebenen Gründen nicht geeignet. Der Beiname „harmonisch“ ist daher auch für diese Tonleiter nicht gut gewählt; man hat nämlich dieses Beiwort hier nur in derjenigen Bedeutung zu nehmen, in welcher es §. 50 vorkommen wird.

V. Ueber den Zusammenhang der Intervalle.

§. 49.

Jeder Ton innerhalb der Octave ist hauptsächlich einer doppelten Beziehung unterworfen, nämlich der Vergleichung mit dem Grundtone und mit der 8^{va}, welche letztere gleichsam den entgegengesetzten Grundton darstellt. Durch den Abstand eines Tones von dem Grundtone wird also zugleich ein zweites Intervall, nämlich sein Abstand von der Octave oder seine Umkehrung bestimmt *). Wird das eine Intervall grösser oder kleiner, oder mit andern Worten, erhöht oder vermindert, so ist klar, dass seine Umkehrung beziehentlich kleiner oder grösser werden oder sich vermindern oder erhöhen muss. Beide Intervalle machen also stets zusammen die volle Octave aus, oder jedes derselben ergänzt das andere zur Octave; so wird z. B. durch die grosse Terz CE die kleine Sexte $E^bC = CA^b$, und durch die kleine Sexte CA^b die grosse Terz $A^bc = CE$ bestimmt; durch die Quarte die Quinte, und durch die Quinte die Quarte. Die Stufenzahlen der einander zur Octave ergänzenden Intervalle machen daher zusammen stets die Zahl 9 aus, die Beinamen gross und übermässig verwandeln sich für das umgekehrte Intervall in klein und vermindert, und diese umgekehrt in jene. Man wird hieraus zugleich erkennen, dass die Intervalle

*) Denkt man sich zwischen zwei um eine Octave von einander verschiedenen Tönen einen dritten Ton, z. B. die drei Töne C D c, so heisst Dc die Umkehrung des Intervalles CD, und dieses CD die Umkehrung von Dc. So stellt man es gewöhnlich in den Lehrbüchern über practische Musik dar, dass nämlich eine Umkehrung entstehe, wenn man den höhern oder tiefern Ton eines Zweiklanges um eine Octave resp. tiefer oder höher setzt.

der ersten Hälfte der Octave in ihrer Umkehrung die Intervalle der zweiten Hälfte und folglich letztere auch umgekehrt die ersteren bestimmen. Nach §. 44, 5 findet man die Umkehrung eines Intervalles, wenn man mit seinem Exponenten in den Exponenten der Octave oder in die Zahl 2 dividirt, folglich ist $\frac{2}{5/4} = \frac{8}{5}$ die Umkehrung der grossen Terz, d. i. die grosse Terz $\frac{5}{4}$ bestimmt zugleich das Intervall $\frac{8}{5}$ oder die kleine Sexte, welche Betrachtung künftig (§. 61) ihre weitere Anwendung finden wird.

Ausser den bereits vorgekommenen besonderen Intervall-Benennungen erwähne ich hier zugleich noch der folgenden, weil sie im theoretischen Vortrage oder in der sogenannten Canonik zuweilen gebraucht werden:

Kleiner Triton FH	$\frac{45}{32}$	492.	508	$\frac{64}{45}$	Hf grosser Triton *).
Grosser Diton	$\frac{81}{64}$	340.	660	$\frac{128}{81}$	kleiner Tetraton.
Kleiner Diton	$\frac{100}{81}$	304.	696	$\frac{81}{50}$	grosser Tetraton.
Grosses Limma	= grosser ganzer Ton weniger dem kleinen halben Tone . . .				111 oder $\frac{27}{25}$.
Kleines Limma	= grosser ganzer Ton — grosser halber Ton				77 „ $\frac{135}{128}$.
Pythagorisches Limma	= Quarte — grosser Diton				75 „ $\frac{243}{256}$.
Grosse Diésis	= grosser halber Ton — kleiner halber Ton				34 „ $\frac{128}{125}$.
Kleine Diésis	= kleiner halber Ton — grosse Diésis				25 „ $\frac{3125}{3072}$.
Comma ditonicum, Pythagorisches Comma,	= 12 Quinten — 7 Octaven				20 „ $\frac{531441}{524288}$.
Comma syntonum, grosses Comma,	= dem Unterschiede CD — DE				18 „ $\frac{81}{80}$.
Kleines Comma	= grosse Diésis — grosses Comma				16 „ $\frac{2048}{2025}$.
Schisma	= grosses Comma — kleines Comma				2 „ $\frac{32805}{32768}$.

VI. Aeltere Theilungsarten der Intervalle.

§. 50.

In früheren Zeiten hielt man viel auf die sogenannte arithmetische und harmonische Theilung der Intervalle, welche Rechnungsweisen zwar jetzt nicht mehr gebräuchlich sind, dennoch aber einer kurzen Erwähnung bedürfen, weil man ehemals das ganze Tonsystem daraus ableiten wollte. Arithmetisch hiess ein Intervall getheilt, wenn man das arithmetische Mittel aus den Längen der beiden Saiten nahm, deren Grundtöne jenes Intervall bildeten. Die Saitenlängen der Tonica und Octave verhalten sich wie 1 zu $\frac{1}{2}$, und ihr arithmetisches Mittel ist $= \frac{3}{4}$; der arithmetische Mittelton zwischen der Tonica und Octave war also die Quarte. Harmonisch getheilt hiess es, wenn zu beiden gegebenen Saitenlängen eine mittlere Länge von der Art gefunden wurde, dass der Unterschied zwischen der ersten und mittleren Saite sich zu dem Unterschiede zwischen der mittleren und letzten verhielt, wie die erste zur letzten. Seien n und r die Längen der beiden gegebenen Saiten, x die Länge der zu findenden Saite, so soll man haben $\frac{n-x}{x-r} = \frac{n}{r}$, woraus $x = \frac{2nr}{n+r}$. Für die Saite des harmonischen Mitteltones zwischen Grundton und Octave hätte man also $x = \frac{2 \times 1 \times \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$; der zugehörige Mittelton ist also hier die Quinte. Einfacher wird diese Regel, wenn man statt der Saitenlängen die Pulszahlen in Rechnung nimmt. Seien nämlich n', r', x' die Pulszahlen für die Saiten n, r, x , so hat man $n = \frac{1}{n'}$, $r = \frac{1}{r'}$, $x = \frac{1}{x'}$ und folglich

$$\frac{1}{x'} = \frac{2 \times \frac{1}{n'} \times \frac{1}{r'}}{\frac{1}{n'} + \frac{1}{r'}} = \frac{2}{n' + r'} \quad \text{oder} \quad x' = \frac{n' + r'}{2}$$

d. i. die Pulszahl des harmonischen Mitteltones ist die Hälfte von der Summe der Pulszahlen der beiden gegebenen Töne. Für obigen Fall also $\frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} =$ Quinte. Hiernach nannte man die Tonleiter §. 48 die harmonische, weil jeder ihrer Töne in der harmonischen Mitte zwischen seinen Nachbarn liegt.

VII. Ueber die verschiedenen Klanggeschlechter.

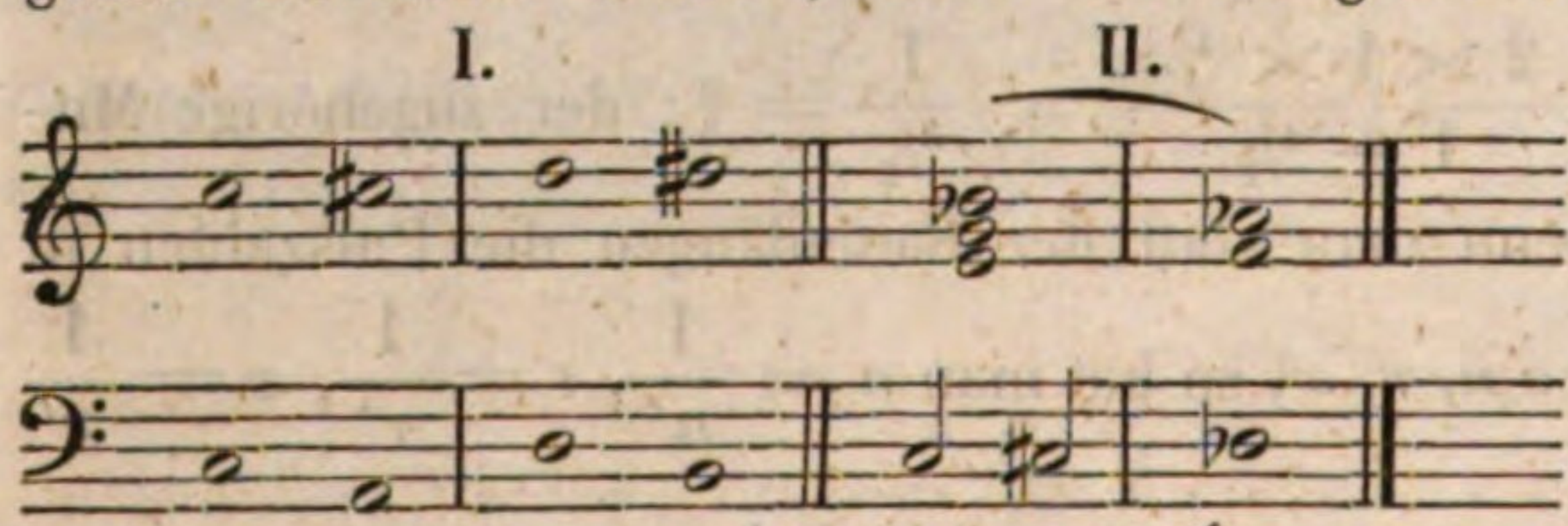
§. 51.

Um die Bedeutung der in der modernen Musik vorkommenden drei Klanggeschlechter, des diatonischen, chromatischen und enharmonischen, kennen zu lernen, ist es nöthig, einen Begriff von der theoretischen Musik der

*) Die volle Octave enthält sehr nahe genau (bis auf das Pythagorische Comma) sechs grosse ganze Töne, daher die Namen obiger Intervalle: Diton = 2 Töne, Triton (annähernd genau) = 3 Töne, Tetraton = 4 Töne.

alten Griechen zu haben, woraus jene Benennungen entlehnt sind. Das Folgende wird dazu hinreichen. Die Ton-systeme der alten Griechen waren aus sogenannten Tetrachorden oder Tonleitern von 3 Stufen oder 4 Saiten zusammengesetzt, welche nach verschiedenen Regeln gestimmt wurden. Die allgemeinen Regeln waren hierbei *) folgende: 1) die Endpunkte des Tetrachords oder der erste und vierte Ton mussten stets eine reine Quarte bilden; 2) die dritte Stufe oder das Intervall zwischen dem dritten und vierten Tone durfte nicht grösser als ein grosser Ditonus, nicht kleiner als ein grosser Ton sein, es war also dieses Intervall in die Grenzen zwischen 340 und 170 eingeschlossen; 3) die erste Stufe durfte nicht grösser sein als die zweite. Hieraus entsprangen jene drei Haupt-Klanggeschlechter. Diatonisch nannte man das Geschlecht, wenn das Tetrachord aus einem halben und zwei ganzen Tönen bestand; chromatisch, wenn das Tetrachord aus zwei halben Tönen und einer kleinen Terz bestand; enharmonisch, wenn es aus zwei Vierteltönen und einem Diton oder einer grossen Terz bestand. Auch in der modernen Musik nennen wir nun das Klanggeschlecht diatonisch, wenn die Fortschreitung ebenfalls bloss durch ganze und grosse halbe Töne geschieht; chromatisch, wenn in der Fortschreitung auch kleine halbe Töne, wie in $CC\sharp DD\sharp E$ u. s. w. vorkommen; enharmonisch, wenn das System die Fortschreitung durch noch kleinere Stufen, ähnlich den griechischen Vierteltönen, gestattet, wie z. B. in der Tonfolge $CC\sharp D\flat F$ oder $DD\sharp E\flat G$. In der Tonleiter $CC\sharp DD\sharp EFF\sharp GG\sharp AA\sharp Hc$ sind daher eigentlich nur die Stufen $CC\sharp$, $DD\sharp$, $FF\sharp$, $GG\sharp$ und $AA\sharp$ chromatisch oder kleine halbe Töne, die übrigen Stufen aber $C\sharp D = 111$, $D\sharp E = 93$, $E F = 93$, $F\sharp G = 111$, $G\sharp A = 93$, $A\sharp H = 111$ und $Hc = 93$ gehören zum diatonischen Geschlecht. Ebendasselbe gilt für die andere chromatische Tonleiter (§. 47) $CD\flat DE\flat EF$ u. s. w.: hier sind $D\flat D$, $E\flat E$ u. s. w. chromatisch, $CD\flat$, $DE\flat$ u. s. w. aber diatonisch. Man erkennt hieraus leicht die Regel, dass nur diejenigen Stufen chromatisch sind, welche durch einerlei Buchstaben, wovon der eine mit einem $\sharp$ oder $\flat$ versehen ist, bezeichnet werden; bloss BH macht eine Ausnahme, weil man nicht $H\flat H$ schreibt. Im Notensysteme sind daher alle Stufen chromatisch, welche durch Noten auf einerlei Linie, oder in einerlei Spatium dargestellt werden, und von welchen die eine mit einem $\sharp$ oder $\flat$ versehen ist. In der enharmonischen Scala aber sind endlich nur diejenigen Stufen enharmonisch, welche von den zwischen die ganzen und halben Töne der diatonischen Tonleiter eingelegten $\sharp$ und $\flat$ Tönen unter sich und beziehendlich mit den Endpunkten der grossen halben Töne gebildet werden, wie z. B. $C\sharp D\flat$, $EF\flat$ u. s. w., siehe §. 47. Aus diesen Gründen nennt man daher auch die chromatische Scala die diatonisch-chromatische, die enharmonische Scala aber die diatonisch-chromatisch-enharmonische, weil die genannten Scalen beziehendlich diese verschiedenen Fortschreitungen in sich enthalten.

Die neuere practische Musik besitzt zwar wegen der von ihr unerlässlich geforderten Temperatur der Töne (§. 80 fg.) bloss die diatonische Tonleiter, und auch diese nicht mehr in ihrer vollen Reinheit. Diese gleichmässige Abstufung der Scala führt indess nothwendigerweise den Umstand herbei, dass jene diatonische Tonleiter wenigstens für 12 Töne innerhalb der Octave vorhanden ist, und hieraus entspringt der Vortheil, dass wir durch künstliche Behandlung der Harmonie sowohl die chromatische, als auch die enharmonische Fortschreitung so nahe genau darstellen können, dass das Mangelhafte vom ungeübten Gehör nicht empfunden wird. So wird z. B.

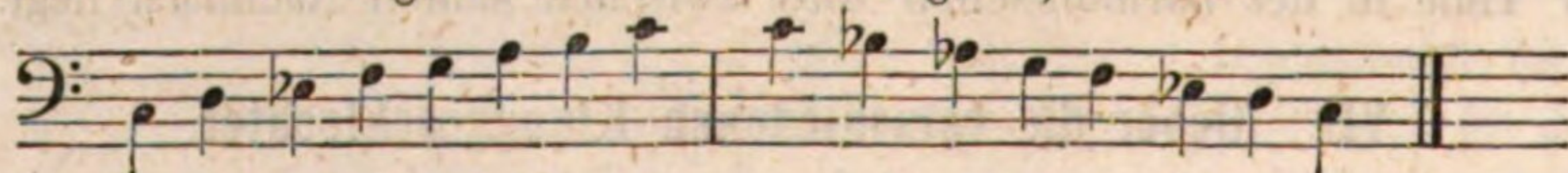


in gleicher Höhe giebt, abgeht. Man sehe hierüber das Weitere §. 118.

VIII. Dur- und Moll-Tonleiter.

§. 52.

Die diatonische Tonleiter §. 42 nennt man auch die Dur- oder harte Tonleiter, im Gegensatz der sogenannten Moll- oder weichen Tonleiter, in welcher letztern statt der grossen Terz die kleine Terz gebraucht wird. Die Moll-Scala nimmt man aufsteigend anders als absteigend, nämlich



Sie gehört schon unter die künstlichen Tonfolgen, deren unzählige möglich sind, und deren Einrichtung durch kein besonderes Gesetz beschränkt wird; daher lässt sich als Grund für obige Einrichtung auch nur erläuternd annehmen, dass im Aufsteigen der Character des Moll durch die kleine Terz $e\flat$ hinreichend angedeutet, für den beru-

*) Rousseau, Dict. de mus. art. Genre.

higenden Schluss aber h als Leitton nöthig sei, und deshalb dann zwischen h und g der Ton a, der diatonischen Fortschreitung wegen, genommen werden müsse. Beim Absteigen aber scheint es erforderlich, durch die Töne b und a^b als kleine Terzen zu den darauf folgenden g und f den Character der Weichheit ebenfalls gleich anfangs zu bezeichnen. Die Dur- und Moll-Tonleiter umfasst also in ihrer Vereinigung folgende Intervalle:

C	D	E ^b	E	F	G	A ^b	A	B	H	c
1	$\frac{9}{8}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{15}{8}$	2
0	170	263	322	415	585	678	737	848	907	1000

und nur diese zusammengesetzte Leiter ist Gegenstand der mathematischen Feststellung oder Entwicklung, womit wir uns jedoch erst später §. 62 vollständig befassen können.

IX. Von den Con- und Dissonanzen.

§. 53.

Das Zusammenklingen zweier Töne oder die Wirkung eines Intervalles (Zweiklanges) ist theils mehr oder weniger angenehm, theils störend und beunruhigend. Jenes angenehme Zusammenklingen hat man Consonanz, das beunruhigende aber Dissonanz genannt. Die Verbindung mehrerer Töne zu einem vereinigten Klange heisst dann ein Accord, und zwar ein con- oder dissonirender, je nachdem seine Wirkung angenehm oder beunruhigend ist. Die Griechen betrachteten bloss die Quarte, Quinte und Octave als Consonanzen, in der neueren Zeit rechnet man aber auch noch die kleine und grosse Terz und die kleine und grosse Sexte zu den Consonanzen, theilt jedoch sowohl die Consonanzen, als auch die Dissonanzen wieder besonders ein in vollkommene und unvollkommene; man betrachtet nämlich

Quarte, Quinte und Octave	als vollkommene	} Consonanzen,
kleine und grosse Terz, kleine und grosse Sexte „	unvollkommene	
grosse Secunde und kleine Septime	„ unvollkommene	} Dissonanzen.
alle übrigen Intervalle	„ vollkommene	

Dieses Con- und Dissoniren steht in einem merkwürdigen Zusammenhange mit den Pulsverhältnissen der betreffenden Töne. Man findet, dass ein Intervall um so mehr consonirt, je einfacher sein Exponent oder das Verhältniss ist, welches zwischen den Pulsmengen beider Töne Statt findet, so wie dass ein Intervall gegen theils an Wohlgefälligkeit immer mehr abnimmt und beunruhigend wird, je mehr sich das Pulsverhältniss von der Einfachheit entfernt. So giebt z. B. das Pulsverhältniss $\frac{1}{1}$ den Einklang, $\frac{2}{1}$ die Octave, $\frac{3}{2}$ die Quinte, $\frac{4}{3}$ die Quarte, $\frac{5}{4}$ die grosse Terz, $\frac{6}{5}$ die kleine Terz u. s. w. Aus diesem überall sich bewährenden innigen Zusammenhange zwischen der Wirkung zweier Töne und ihrem Pulsverhältnisse folgerte man mit Recht, dass das Con- und Dissoniren der Töne in dem mehr oder weniger einfachen Pulsverhältnisse derselben seinen Grund haben müsse, ohne jedoch die weitere Ursache dieser Erscheinung befriedigend erklären zu können. Alle zu diesem Behufe aufgestellten Hypothesen und insbesondere die Erklärung, dass ein Pulsverhältniss für das Ohr um so angenehmer und fasslicher sein müsse, je öfter die Pulse zweier oder mehrerer Töne wieder zusammenträfen, waren erheblichen Einwürfen ausgesetzt. Man konnte fragen: was würde aus der Octave werden, wenn sie mit der Tonica nicht in einem Momente zu schwingen anfinke? Die Pulse würden ja dann nie zusammenfallen! Man konnte ferner einwenden, dass man die Exponenten der Consonanzen um eine merkliche Grösse abändern, z. B. in der *Kirnberger'schen* Temperatur (§. 84) die Quinten von C, A, D und F $\sharp$ in den verschiedenen Verhältnissen $\frac{3}{2}$, $\frac{161}{108}$, $\frac{240}{161}$, $\frac{16384}{10935}$ ausüben könne, ohne der Consonanz, wenigstens für das gewöhnliche Gehör, wesentlich zu schaden, und dieser Umstand liess sogar wieder bezweifeln, dass das Consoniren der Töne überhaupt an die Einfachheit ihrer Pulsverhältnisse gebunden sei. Beide Einwürfe widerlegen sich aber völlig befriedigend, sie konnten bloss gegen die unvollständig entwickelte Hypothese aufgestellt werden. Folgende Betrachtung des Vorganges wird diese Zweifel beseitigen.

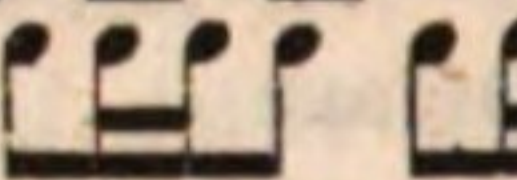
§. 54.

Wenn wir eine Reihe nach gleichen Zwischenzeiten aufeinanderfolgende gleichstarke Schläge oder Pulse hören, so wird unsere Aufmerksamkeit zwar schon mehr angeregt, als wenn die Pulse in ungleichen Zeiträumen und in verschiedener Stärke ohne alle erkennbare Regelmässigkeit aufeinanderfolgen, doch erzeugt eine pendelartige Gleichförmigkeit auch nur blosser Aufmerksamkeit, welche bald in Gleichgültigkeit übergeht, wenn nicht einige von diesen Pulsen etwas stärker hervortreten, so dass die Aufmerksamkeit bei jedem derselben von Neuem geweckt und zu Erwartung des nächsten stärkeren aufgefordert oder in der angeregten Spannung erhalten wird. Folgen diese stärkeren Pulse nicht in regelmässig geordneten Zeiten oder auch nur in so langen Unterbrechungen aufeinander, dass sie das blosser Gefühl nicht vorhersehen kann, so erscheinen sie unerwartet und werden aufregend und störend. Kehren sie aber in steter regelmässiger Ordnung wieder, und zwar so bald hinter einander, dass das Gefühl die Zwischenzeiten deutlich erkennt, so wird ihr Erscheinen sogar angenehm, wenn diese Zeiträume auf eine einfache, dem blossen Gefühl verständliche Weise, d. h. ohne dass der Verstand durch wirkliches Zählen derselben

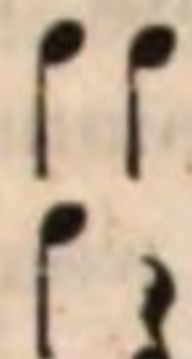
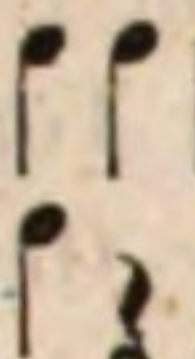
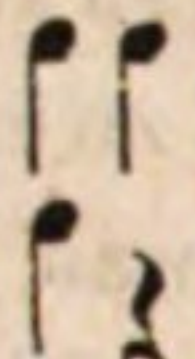
nachhelfen müsse, übersehen werden können. Der Erfahrung nach findet diess Statt, wenn die Anzahl der kleinern zur Abmessung nöthigen gleichen Zeittheile nicht über 4 ansteigt, oder die grössere Anzahl von solcher Beschaffenheit ist, dass sie sich in 2, 3 oder 4 kleinere gleiche Theile von 2, 3 oder 4 Einheiten zerfallen lässt. Abmessungen nach der Zahl 5 sind zwar dem blossen Gefühl ebenfalls noch möglich, doch neigt sich dieses Gefühlsmaass schon zur Aufregung hin; völlig aufregend wird für das Gefühl das siebentheilige Maass, unverständlich, störend und widrig aber eine Abmessung nach den noch höheren Primzahlen 11, 13, 17, 19 u. s. w., weshalb schon *Leibnitz* bemerkt, dass das Ohr nur bis 5 zählen könne. Hierauf beruhen die Gesetze des Rhythmus oder der Abmessung des Zeitflusses durch regelmässig geordnete sinnliche Zeichen oder Pulse mittelst des blossen Gefühls.

Die Abmessung ist ihrer Natur oder ihrem Character nach:

- ruhig, wenn sie mit der Zahl 2 und ihren Verdoppelungen bewirkt werden kann;
- lebendig, wenn das Maass 3 zum Grunde liegt;
- zur Aufregung sich hinneigend bei dem 5theiligen Maasse;
- völlig aufregend im 7theiligen Maasse;
- störend beim 11, 13, 17 u. s. w. theiligen Maasse.

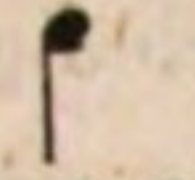
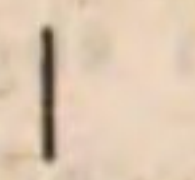
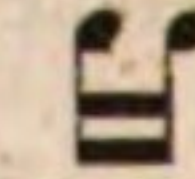
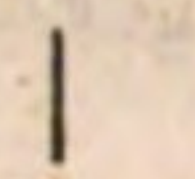
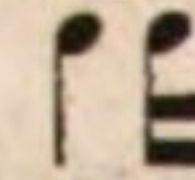
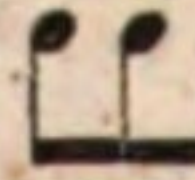
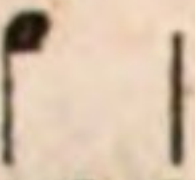
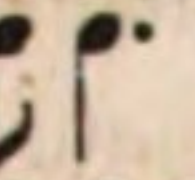
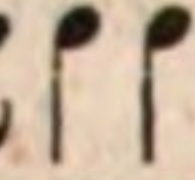
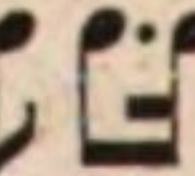
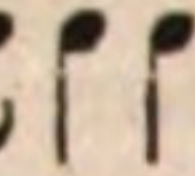
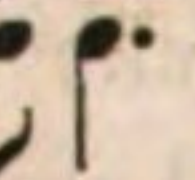
Kann ein Rhythmus nur mittelst der Verbindung zweier oder mehrerer solcher Gefühlsmaasse übersehen werden, so ist auch dessen Wirkung ein Zusammengesetztes der jenen Gefühlsmaassen für sich zukommenden Wirkungen. Der Rhythmus kann in unendlich verschiedenen Formen, bald als blosse pendelartig gleichförmige, aber regelmässig accentuirte Pulsfolge wie in  oder in  u. s. w., bald als ein regelmässiger Wechsel grösserer und kleinerer Zeittheile wie in  u. s. w. erscheinen; wir werden indess hier nur diejenigen Erscheinungen zu betrachten haben, welche aus der vereinigten Wirkung zweier oder mehrerer zu gleicher Zeit vorhandenen pendelartigen Pulsfolgen von gleicher oder verschiedener Geschwindigkeit der Pulse entstehen. Wir wollen dabei, der Erleichterung wegen, für jetzt voraussetzen, dass die Anfangspulse der betrachteten Pulsreihen stets zusammenfallen, die blossen einfachen Pulse mit (.), das Gewicht der aus dem Zusammenfallen mehrerer Pulse entstehenden Accente aber, in wachsender Ordnung, mit (.) (.) (.) bezeichnen. Es ergibt sich dann leicht Folgendes:

- 1) Aus der Vereinigung zweier oder mehrerer pendelartigen Pulsreihen von gleicher Geschwindigkeit der Pulse entsteht blosse Monotonie.
- 2) Aus der Vereinigung zweier pendelartigen Pulsreihen, wo die Geschwindigkeit der Pulse in der einen Reihe gerade eine ganze Anzahl mal, z. B. 2, 3, 4 u. s. w. mal grösser ist, als in der andern, entstehen blosse accentuirte Pulsreihen, die einfache Tacteinteilung oder der einfache laufende (accentuirte) Rhythmus. Z. B.

Pulsreihen	{	$(\frac{2}{1})$		etc.	$(\frac{3}{1})$		etc.	$(\frac{4}{1})$		etc.
Wirkung			.			.			.	

- 3) Ist die Geschwindigkeit der Pulse in der einen Reihe nicht gerade eine ganze Anzahl mal grösser, als in der andern, so erscheint der hüpfende (quantitirende) Rhythmus, z. B.

Die Geschwindigkeitsverhältnisse geben den Rhythmus:

$\frac{3}{2}$							
$\frac{4}{3}$							
$\frac{5}{4}$							
$\frac{5}{3}$							
(5.3.2)							
$\frac{6}{5}$							

Die letzten vier Rhythmen gehören in das Gebiet des fünftheiligen Tactes, und es bedarf einiger Uebung, um sie fliessend darzustellen.

- 4) Aus der Verbindung von drei und mehr Pulsreihen, wo die Geschwindigkeit jeder schnelleren Reihe gerade eine ganze Anzahl mal grösser ist, als die Geschwindigkeit irgend einer der übrigen langsameren Reihen, entsteht die zusammengesetzte Tacteinteilung oder der zusammengesetzte Rhythmus, z. B.

Pulsverhältnisse.

Gliederung.

1. 2. 4

1. 3. 6

1. 2. 6

1. 2. 4. 8

1. 3. 9

1. 3. 12

1. 3. 6. 12

1. 2. 4. 12

' . . .

' . . .

' . . .

- . . .

. . . .

' . . .

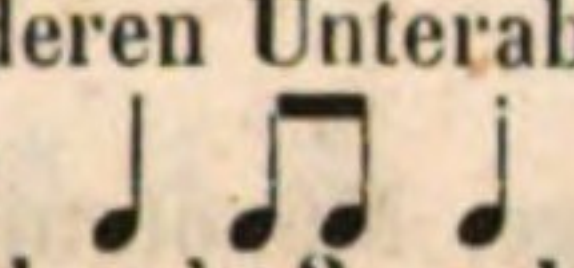
- . . .

- . . .

5) Aus der Verbindung laufender und hüpfender Rhythmen entsteht der gemischte Rhythmus, z. B.

(4. 3. 2)  oder 

(6. 4. 3) 

Der Musiker wird hieraus ohne Weiteres erkennen, dass die Rhythmen $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{6}{5}$ u. s. w. an Wohlgefälligkeit immer mehr abnehmen müssen, weil zu ihrer Uebersicht eine immer grössere Anzahl gleicher Maasstheile nöthig ist, deren Unterabtheilung mit immer grösseren Zahlen bewirkt werden muss. So lässt sich z. B. der Rhythmus $\frac{3}{2}$ oder  noch sehr leicht durch 6 gleiche Zeiten mittelst der einfachen rhythmischen Maasse 3 und 2, nämlich durch 3 mal 2 Achtel abmessen und erkennen; der Rhythmus $\frac{4}{3}$ erfordert schon 3 mal 4 Theile, der Rhythmus $\frac{5}{4}$ schon fünf 4theilige Glieder u. s. w. Auch wird jetzt erhellen, dass ein Rhythmus, zu dessen Abmessung verschiedene einfache Gefühlsmaasse erforderlich sind, auch das Characteristische dieser Maasse in sich vereinigt. Rhythmen, wie (1. 2. 4) (1. 2. 4. 8) zu deren Uebersicht bloss die Zahl 2 und ihre Verdoppelungen nöthig sind, haben den Character vollkommener Ruhe; im Rhythmus $\frac{3}{2}$ ist das Ruhige mit dem Lebenvollen verbunden; im Rhythmus $\frac{5}{4}$ wird das zur Aufregung sich hinneigende Maass 5 durch das ruhige Maass 4 gemildert; der Rhythmus $\frac{6}{5}$ ist eine Verbindung des Lebenvollen und Aufregenden; ihm ähnlich, jedoch wegen der zu seiner Abmessung erforderlichen doppelten Anzahl Maasstheile weniger leicht verständlich, ist der Rhythmus $\frac{6}{5}$ u. s. w.

Als Vorbereitung für das Folgende sei hier noch bemerkt, dass man sich jene Rhythmen auch leicht durch Zeichnung versinnlichen kann, wenn man zwei oder mehrere gleich lange gerade Linien in so viele gleiche Theile eintheilt, als in jeder Pulsreihe, für einerlei Zeit, Pulse vorhanden sein sollen. Projicirt man dann die erhaltenen Theilpunkte, welche nunmehr die Pulse vorstellen, sämmtlich auf einer besonderen Linie wie in Fig. 9 geschehen, so erhält man ein Bild des betreffenden Rhythmus. Dasselbe erreicht man auch, wenn man ohne Weiteres eine und dieselbe gerade Linie oder auch einen Kreisbogen nach und nach in so viele gleiche Theile eintheilt, als in jeder Pulsreihe, für einerlei Zeit, Pulse vorkommen sollen. Den Rhythmus $\frac{3}{2}$ z. B. erhält man, wenn man irgend eine gerade Linie oder Länge erst in 2 und dann wieder in 3 gleiche Theile eintheilt und die Theilpunkte dann markirt. Figur 15 zeigt die Rhythmen $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{4}$, woran schon das blosse Auge das Abnehmen des Leichtverständlichen erkennen wird; in den Figuren 16 a, b, c, d findet man beziehentlich die Rhythmen (4. 3. 2) (8. 6. 5. 4) (6. 5. 4. 3) und (6. 4. 3). Das Zusammentreffen mehrerer Pulse ist hier durch die Grösse der Punkte anschaulich gemacht worden; der letzte grosse Punct in jeder Figur bezeichnet den Anfang der Wiederholung derselben. Jede solche Linie bezeichnet nämlich die dem Rhythmus zugehörige volle Zeitdauer, und die zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Puncten oder Pulsen gelegenen Theile dieser Linien messen die Zeit, welche zwischen diesen Pulsen verfliesst. Die beim Zusammenfallen der Anfangspulse aus der Vereinigung mehrerer Pulsreihen entstehenden Gruppen werde ich in der Folge rhythmische Systeme nennen; das Ende des vorigen und der Anfang des folgenden fallen stets in ein und dasselbe Zeitmoment zusammen.

§. 55.

Fallen die Anfangspulse nicht zusammen, so ändert sich bloss die Figur des rhythmischen Systems, seine Ausdehnung oder die zu seiner vollen Ausbildung nöthige Zeit bleibt völlig, sein Character im Wesentlichen ungeändert. Man denke sich z. B. den Maassstab M Fig. 9 unter dem Maassstabe N dergestalt fortgeschoben, dass die Anfangspulse nach und nach immer weiter auseinandertreten und man wird leicht einsehen, dass die Pulse beider Reihen sich entweder wieder symmetrisch ordnen oder eine direct fortlaufende, nach ihrem Schlusse immer wieder in der nämlichen Gestalt erscheinende Periode bilden. Wie man auch immer die Anfänge der einzelnen Pulsreihen auseinander setzen möge, es bleibt die Länge der Periode stets so gross, als das entsprechende rhythmische System. Durch das ungleichzeitige Anfangen der Pulsreihen wird daher der ihrem Geschwindigkeitsverhältniss entsprechende rhythmische Schluss nicht im Mindesten verändert, er erfolgt genau innerhalb der nämlichen Zeit, als wenn die ersten Pulse zusammengefallen wären. Auch wird der einzig von diesem Geschwindigkeitsver-

hältniss abhängige Character des Rhythmus dadurch im Wesentlichen eben so wenig aufgehoben, als die Monotonie zweier isochronisch schwingenden Pendel, wenn sie in verschiedenen Momenten ihre Schwingungen beginnen.

§. 56.

Die Töne sind nun nichts anderes, als die Wirkung unzählbar schneller pendelartig gleichförmiger Vibrationspulse klingender Körper. Aus der Vereinigung zweier oder mehrerer solcher Pulsreihen von gleicher oder verschiedener Geschwindigkeit muss daher nothwendig auch dieselbe Monotonie oder beziehentlich derselbe Rhythmus entstehen, welchen wir §. 54 für ebendieselben Verbindungen im Gebiete des Zählbaren fanden. Vergleichen wir nun ferner die Erscheinungen, welche aus der vereinigten Wirkung solcher Pulsreihen im Gebiete des Zählbaren und des Unzählbaren entstehen, so finden wir zwischen beiden Wirkungen die vollkommenste Aehnlichkeit. Eben dieselben Pulsreihen, welche für das Ohr bei zählbarer Geschwindigkeit der Pulse wohlgefällig, aufregend, störend oder widrig waren, erscheinen auch bei grösserer nicht mehr zählbarer Schnelligkeit und zwar in völlig analogem Grade wohlgefällig, aufregend und störend; sie werden dann als **Klänge** empfunden und bilden die in folgender Uebersicht angegebenen Erscheinungen:

Ursache.	Wirkung im Tactgebiete.	Wirkung im Tongebiete.
	I. Im Allgemeinen.	
Unregelmässige Pulse.	Bedeutungslos.	Geräusch.
Pendelartige gleichstarke Pulse.	Zeitmaass.	Einfache Klänge, Monotonie.
Rhythmische Pulse.	Musikalischer Tact, Versmaasse.	Polytonie; con- und dissonirende Accorde.

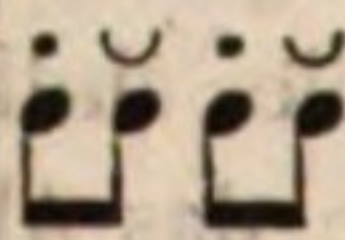
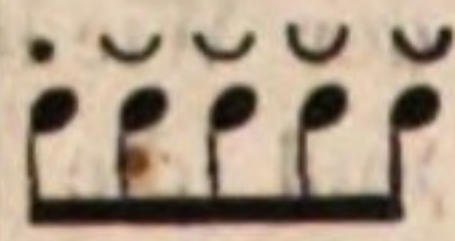
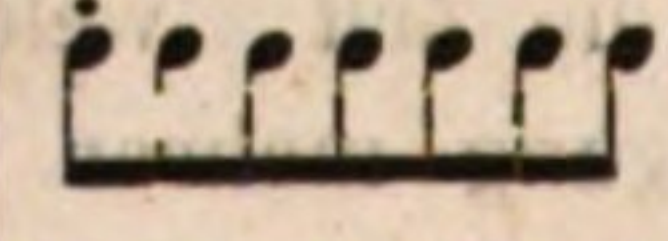
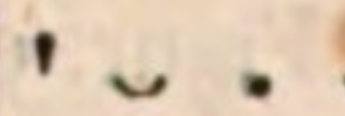
II. Insbesondere.**a. Pendelartige gleichstarke Pulse.**

Grössere Geschwindigkeit giebt immer höhere Töne. Vier Reihen von den Geschwindigkeitsverhältnissen 4, 5, 6, 8 oder 10, 12, 15, 20 geben beziehentlich die zum Dur- und Moll-Vierklang gehörigen Töne, und 8 Reihen von den Geschwindigkeitsverhältnissen

24 27 30 32 36 40 45 48 geben Tonreihen
wie C D E F G A H c,

oder die reine diatonische Tonleiter, wie es der bekannten Theorie entspricht.

b. Rhythmische Pulse.

Ursache.	Wirkung im Tactgebiete.	Wirkung im Tongebiete.
Einfache laufende Rhythmen.		
$\frac{2}{1}$	 u. s. w. $\frac{2}{4}$ Tact.	Zusammenklang von Grundton und Octave.
$\frac{3}{1}$	 u. s. w. $\frac{3}{4}$ u. s. w. Tact.	Grundton und 2te Quinte z. B. Cg.
$\frac{5}{1}$	 . . . $\frac{5}{4}$ u. s. w. Tact.	Grundton und grosse Terz in der 2ten Octave.
$\frac{7}{1}$	 u. s. w. störende Pulsfolge.	Grundton und kleinste Septime (wesentliche Dissonanz).
$\frac{11}{1}, \frac{13}{1}, \frac{17}{1}$ u. s. w.	Unverständliche Pulsreihe.	Unverständliche Zweiklänge.
Zusammengesetzte laufende Rhythmen.		Tonverbindungen wie
(4, 2, 1)	 Kleiner $\frac{4}{4}$ Tact.	C c $\overline{\text{c}}$
(6, 2, 1)	 $\frac{6}{8}$ Tact.	C c $\overline{\text{g}}$
(9, 3, 1)	 $\frac{9}{8}$ Tact.	C g $\overline{\text{d}}$
(12, 4, 2, 1)	 $\frac{12}{8}$ Tact.	C c $\overline{\text{c}}$ $\overline{\text{g}}$

Ursache.	Wirkung im Tactgebiete.	Wirkung im Tongebiete.
Hüpfende Rhythmen.		
$\frac{3}{2}$		Quintconsonanz, z. B. C c g
$\frac{4}{3}$		Quartconsonanz, z. B. C g c
$\frac{5}{4}$		Terzconsonanz, z. B. mit dem C c e Combina-
$\frac{5}{3}$		grosse Sexte, z. B. tions-Tone. C g e §. 39. 68.
(5, 3, 2)		Quint-Decime, z. B. C c g e
$\frac{6}{5}$		Kleine Terz, z. B. C e g
Gemischte Rhythmen.		Accorde wie
(4, 3, 2)		C G c
(6, 4, 3)		C F c
8, 6, 5, 4		C E G c
6, 5, 4, 3		C F A c
20, 15, 12, 10	Lassen sich ihrer grossen Ausdehnung wegen hier nicht darstellen.	C E ^b G c

Die Wirkungen zählbarer und in einen Klang zusammenfliessender Pulse sind also einem und demselben Gesetz unterworfen, dem Gesetze des Rhythmus. Unregelmässigkeit bleibt im Gebiete des Zählbaren und des Klanges bedeutungslos; pendelartige Gleichförmigkeit erscheint in beiden Gebieten als blosser Monotonie. Rhythmische Folge bildet im Zählbaren den angenehmen Tact, wie beim Schmieden, Böttchern, Treschen, Trommeln, und das wohlgefällige Versmaass; im Reiche des Klanges die consonirenden Tonverbindungen. Nimmt die Eurhythmie im Zählbaren an Wohlgefälligkeit ab, so vermindert sich auch in gleichem Grade die angenehme Wirkung in der Sphäre des Klanges und was im Zählbaren unverständlich war, bleibt auch unverständlich im Gebiete der Töne. Neben der Eigenschaft, blosser zählbarer Pulsreihen zu unterscheiden, muss also das Ohr auch die höhere Fähigkeit besitzen; die Verhältnisse der Geschwindigkeiten in den Pulsreihen und deren rhythmische Gliederungen noch zu empfinden, wenn die Pulse selbst unzählbar schnell aufeinanderfolgen, was übrigens unleugbar schon daraus erhellt, dass wir die Töne nach Höhe und Tiefe zu unterscheiden vermögen. Dass diese höhere Fähigkeit des Ohres auch wieder ihre Grenzen hat, jedoch bewundernswürdig gross ist, werden wir später finden.

§. 57.

Wir wollen nunmehr auch die Störung betrachten, welche entstehen muss, wenn die rhythmischen Verhältnisse nicht völlig genau, oder, mit andern Worten, die Intervalle temperirt sind. Um hierzu ein Beispiel aus der Erfahrung zu entlehnen, wollen wir die grosse Terz in dem gleichschwebend temperirten 12stufigen Systeme annehmen, welche nach der III. Tafel 126 Pulse giebt, während der reinen grossen Terz nur 125 zukommen. Man hat dann für den Zweiklang C E oder c e statt des reinen Verhältnisses $\frac{5}{4}$ das temperirte Verhältniss $\frac{5.04}{4}$. Wenn c in 1 Secunde 132 mal pulsirt, so kommen dem reinen e in 1 Secunde 165, dem temperirten 166,32 Pulse zu. Die einzelnen Pulse des reinen e sind also um $\frac{1}{165}$, die des temperirten um $\frac{1}{166.32}$ Secunde von einander entfernt; der Unterschied beider Zeiten ist $\frac{1}{20790}$ Secunde. Der 2te, 3te...nte Puls des temperirten e wird daher dem 2ten, 3ten...nten Pulse des reinen e nach und nach um $\frac{1}{20790}$, $\frac{2}{20790}$... $\frac{n-1}{20790}$ Secunde voreilen, und folglich der 6te Puls des temperirten e um $\frac{5}{20790}$ oder um $\frac{1}{4158}$ Secunde früher erscheinen, als der 6te Puls des reinen e oder als der Anfang des zweiten reinen rhythmischen Systems. Statt des reinen Systems entsteht also eine demselben äusserst nahe gleiche Periode, welche sich stetig dergestalt ändert, dass jede folgende Periode von der vorhergehenden nur eben so wenig verschieden ist, als die erste Periode von dem reinen Rhythmus. Das Ohr wird demnach an die veränderte Aufeinanderfolge der Pulse allmählig gewöhnt. Obschon solches indess an den unmittelbar nebeneinanderliegenden Perioden keinen Unterschied finden kann, so muss es doch in der öfteren Wiederholung das stetige Voreilen der Pulse des temperirten e erkennen, es muss gleichsam ein doppeltes Gefühl, ein Streit zwischen Uebereinstimmung und stetig fortwirkender Störung Statt finden. Der 127ste Puls des temperirten e ist um $\frac{126}{20790}$ oder um $\frac{1}{165}$ Secunde vorgeeilt, er trifft also mit dem 126sten Pulse des reinen e oder mit dem

Anfange des 26sten reinen Systems wieder zusammen. Innerhalb jeder zu einer solchen Wiedervereinigung nöthigen Zeit verrücken sich also die Pulse des temperirten e allmählich um den Raum eines ganzen Systems. Die sehr bekannte Erfahrung an zwei nahe isochronisch schwingenden Pendeln, deren Pulse nach und nach bis zu ihrer Wiedervereinigung immer weiter auseinander treten, während man zwischen den unmittelbar aufeinanderfolgenden Pulsperioden keinen Unterschied wahrnehmen kann, werden diess völlig klar versinnlichen. Je kleiner nämlich die Abweichung vom einfachen Pulsverhältnisse ist, desto unmerklicher ist auch die successive stetige Aenderung der Pulsperioden, desto ungestörter bleibt auch der Character des reinen Rhythmus. Je grösser die Abweichung, desto schneller die Aenderung der Perioden, desto auffallender die Störung des Rhythmus. Je länger endlich die rhythmische Periode, oder je unvollkommener der Accord an sich ist, desto weniger muss die Aenderung derselben auffallen und umgekehrt. Nehmen wir jetzt an, dass die Pulse eines temperirten Accords gleich anfangs nicht zusammenfielen, so wird sich dann eine, der Verschiedenheit des Anfangs entsprechende Periode bilden, und die vorseilenden oder zurückbleibenden Pulse temperirter Intervalle werden dann diese Periode allmählich verändern.

§. 58.

Diese Betrachtung widerlegt nun zugleich die §. 53 berührten Einwürfe, welche sich auf die Möglichkeit des Nichtzusammenfallens der Anfangspulse und auf die Zulässigkeit einer kleinen Abweichung vom reinen Pulsverhältnisse stützten. Die nähere Untersuchung über die Grösse dieser Abweichung liefert uns vielmehr im Gegentheil einen neuen Beweis dafür, dass die Reinheit eines Intervalles, also auch die vollkommene Wohlgefälligkeit einer Consonanz, ausschliessend an den genauen Rhythmus der Klangpulse gebunden ist. Die Erfahrung lehrt diess schon an den Sons harmoniques (§. 39) und an den Combinationstönen (§. 40), welche ihrer Natur nach niemals anders als vollkommen rein erscheinen können und eben desshalb ungleich wohlgefälliger sind, als die künstlich gestimmten ähnlichen Tonverbindungen, wobei kleine Abweichungen von der Reinheit selten ganz vermieden werden können. Wir werden §. 90 finden, dass eine Abweichung von $\frac{6}{1000}$ Octave bei den mittlern Consonanzen von dem geübten Gehöre noch bemerkt wird; da nun dieser Abweichung nach §. 72 der Exponent 1,0042 zugehört, so folgt, dass wir bei einer solchen Consonanz schon die kleine Abweichung erkennen, wenn die wahre Pulsmenge bloss um 0,0042 oder in runder Zahl um $\frac{1}{240}$ ihres Werthes verändert erscheint. Man überlege einen Augenblick, was diess bei der grossen Schnelligkeit der Tonpulse sagen will, und erwäge dabei, dass das feine Gehör bei gehöriger Ruhe und länger anhaltender Prüfung diese schon an sich sehr kleine Fehlergrenze noch merklich enger zu ziehen vermag! Eben deshalb ist auch jene temperirte Terz $\frac{5.04}{4}$ für den feinfühlenden Musiker schon so auffällig und hart, und tritt beim Zusammenspiel eines Pianisten und Violinspielers schon so störend hervor, dass man diese Abweichung gar nicht dulden würde, wenn es die Nothwendigkeit (§. 88) nicht erforderte. Der Einwand, dass die Zulässigkeit einer kleinen Abweichung vom wahren Pulsverhältnisse die Hypothese wesentlich erschüttere, ist daher nicht begründet; der blosser Sinn bleibt stets hinter der mathematischen Genauigkeit zurück, und wir müssen im Gegentheil die ausnehmend grosse Feinheit des Gehöres bewundern, welches sich der mathematischen Schärfe so sehr zu nähern vermag.

Aus dem Folgenden wird hervorgehen, wie ungezwungen sich aus dieser Hypothese das Wesen der Musik nach allen Richtungen erklären lässt; insbesondere wird auch ihre Richtigkeit durch die §. 64 beschriebene Sirene so überzeugend bestätigt, dass wenigstens darüber, ob der Octave, Quinte, Quarte u. s. w. bei völliger Reinheit nothwendig die Pulsverhältnisse $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$ u. s. w. zukommen müssen, durchaus kein Zweifel weiter obwalten kann. Ist die Theorie aber hierin zweifellos begründet, dann wird man auch für den weitem Grund des Wohlgefälligen dieser Verhältnisse im Gebiete der Klänge die §. 56 aufgestellte Erklärung als naturgemäss ansehen können. Es dürfte in der That kaum einem Zweifel weiter unterliegen, dass das Störende oder Angenehme in dem Geräusche, einzelnen Klänge, und in den Tonverbindungen von der nämlichen Ursache abhängt, welche uns blosser zählbare Pulsfolgen störend oder angenehm erscheinen lässt, von einem uns inwohnenden Gefühlstacte, einem Verlangen nach Gleichgewicht, Ebenmaass und Rhythmus. Je mehr der äussere Eindruck mit diesem innern Verlangen in Widerspruch tritt, desto grösser muss die Aufregung sein und umgekehrt.

Der längst geahnete Zusammenhang zwischen den Wirkungen der Tonverbindungen und der den letztern angehörigen Pulsverhältnisse wird daher nach Vorigem so auszudrücken sein, dass das Angenehme eines Pulsverhältnisses von der mehr oder weniger rhythmischen Zahl seines Nenners und Zählers oder, was einerlei ist, von der Einfachheit oder Wohlgefälligkeit des ihm zukommenden rhythmischen Systems abhängt. Die blosser Angabe, dass Tonverbindungen wohlgefällig seien, wenn die Pulsmengen der vereinigten Töne in einem einfachen Zahlenverhältnisse ständen, konnte freilich nicht ganz befriedigen, weil man nicht einzusehen vermochte, warum blosser einfache Zahlenverhältnisse auch im Gebiete des Gefühls Wohlgefallen erzeugen sollen, da doch gerade im Gegentheil das Gefühl sich gehemmt findet, wenn der Verstand rechnen will, jenes das Angenehme der musicalischen Accorde schon empfindet, ehe dieser ein Zahlenverhältniss zu beurtheilen vermag. Das Dunkel verschwindet aber sogleich, wenn man nur einen Schritt weiter geht und die Pulsverhältnisse nicht sowohl als Ziffern, sondern vielmehr als

	C	F $\sharp$	A und D
die Verhältnisse	$\frac{3000}{2000}$;	$\frac{2996}{2000}$;	$\frac{2981}{2000}$;
oder	585	583	576 in Logarithmen.

Man wird hieraus schliessen, dass die Quinte von F $\sharp$ sehr nahe genau, die von A oder D aber schon sehr mangelhaft, nämlich zu auffällig tief erscheinen werde, was auch in der That der Fall ist (§. 90. 91).

X. Ueber die Anzahl und Lage der einfachsten Intervalle.

§. 61.

Nachdem wir im Vorigen gefunden haben, dass nur diejenigen Ton- oder Pulsverhältnisse wohlgefällig sind, welche sich mittelst der einfachen Gefühlsmaasse 2, 3 und 5 übersehen lassen, Abmessungen nach der Zahl 7 schon zur Dissonanz führen und die noch höheren Primzahlen 11, 13, 17 u. s. w. als Gefühlsmaasse ganz ausserhalb des Wohlgefälligen liegen, so können wir nunmehr sämtliche einfache Tonverhältnisse, einschliesslich der aus der Zahl 7 entspringenden, auf folgende Weise leicht durch Rechnung darstellen. Da nämlich nach §. 49 die in der untern Hälfte der Octave liegenden Intervalle durch ihre Umkehrung zugleich die Intervalle der obern Hälfte bestimmen, so bedarf es bloss der Aufsuchung der zwischen der Octavmitte und der Tonica oder zwischen $\sqrt[7]{2}$ und 1 liegenden einfachen Verhältnisse, indem deren Umkehrungen dann den Raum zwischen $\sqrt[7]{2}$ und 2 oder die obere Hälfte der Octave von selbst ausfüllen. So bestimmt sich z. B. aus der Quarte die Quinte, aus der grossen Terz die kleine Sexte u. s. w., und wenn dann zwischen Quarte und grosser Terz kein andres consonirendes Intervall möglich ist, so kann ein solches auch nicht zwischen Quinte und kl. Sexte vorkommen. Zwischen $\sqrt[7]{2}$ und 1 giebt es nun nur folgende einfache, nach den Zahlen 2, 3, 5 und 7 abmessbare Verhältnisse,

$$\frac{7}{5}, \frac{4}{3}, \frac{9}{7}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \frac{7}{6}, \frac{8}{7}, \frac{9}{8}, \frac{10}{9}, \frac{15}{14}, \frac{16}{15},$$

die wir offenbar nicht weiter zu verfolgen brauchen, weil schon das Verhältniss $\frac{16}{15}$ der Monotonie $\frac{1}{1}$ sehr nahe liegt. Stellen wir nun solche mit ihren Umkehrungen zusammen, so erhalten wir folgendes Tableau der einfachsten Intervalle:

I. (absteigend)				II. (aufsteigend)			
Centrum,	$\sqrt[7]{2}$	500	500	$\sqrt[7]{2}$	Centrum,		
übermässige Quarte	$\frac{7}{5}$	485	515	$\frac{10}{7}$	verminderte Quinte,		
Quarte	$\frac{4}{3}$	415	585	$\frac{3}{2}$	Quinte,		
übermässige Terz	$\frac{9}{7}$	363	637	$\frac{14}{9}$	verminderte Sexte,		
gr. Terz	$\frac{5}{4}$	322	678	$\frac{8}{5}$	kl. Sexte,		
kl. Terz	$\frac{6}{5}$	263	737	$\frac{5}{3}$	gr. Sexte,		
kleinste Terz	$\frac{7}{6}$	222	778	$\frac{12}{7}$	grösste Sexte (I),		
grösste Secunde	$\frac{8}{7}$	193	807	$\frac{7}{4}$	kleinste Septime (K),		
grössere Secunde	$\frac{9}{8}$	170	830	$\frac{16}{9}$	kleinere Septime,		
grosse Secunde	$\frac{10}{9}$	152	848	$\frac{9}{5}$	kleine Septime,		
kleine Secunde	$\frac{15}{14}$	100	900	$\frac{28}{15}$	grosse Septime,		
	$\frac{14}{13}$			$\frac{15}{8}$			
	$\frac{16}{15}$	93	907	$\frac{8}{5}$			
etc.	$\frac{m+1}{m}$			$\frac{2m}{m+1}$	etc.		
Tonica	1	0	1000	2	Octave.		

Die aus der Zahl 7 entspringenden Intervalle habe ich so benannt, wie es rücksichtlich der einmal eingeführten Benennungen der übrigen Intervalle, ihrer Lage am besten entsprechen dürfte; die grösste Sexte $\frac{12}{7}$ werde ich künftig mit I (i) bezeichnen.

Jede der beiden Reihen I und II ist die blosse Umkehrung der andern; was die Reihe I für den Grundton ist, das ist die Reihe II in Bezug auf die Octave. Je zwei einander gerade gegenüberstehende Intervalle (correspondirende) füllen zusammen die Region der Octave genau aus, jedes derselben ist also die Ergänzung oder das Octavcomplement des andern correspondirenden Intervalles, wenn man unter Octavcomplement dasjenige versteht, was übrig bleibt, wenn das eine Intervall von der Octave abgezogen wird; die beigesetzten Logarithmen der Intervalle werden diess deutlich erläutern. Das Centrum der Octave oder der Ton 500 ist, wie schon seine irrationale Pulszahl $\sqrt[7]{2}$ anzeigt (§. 58), in Bezug auf Consonanz völlig bedeutungslos, die Endpunkte der Octavregion (Tonica und Octave) aber bilden die vollkommenste ruhigste Consonanz und sind zugleich die Festpunkte,

in Bezug auf welche die Wohlgefälligkeit aller übrigen Intervalle abgemessen wird. Letztere ordnen sich symmetrisch um jenes Centrum oder um den eigentlichen Nullpunct der Consonanz.

Eben so findet auch für das Quart- und Quint-Intervall ein ähnlicher symmetrischer Mittelpunkt Statt, z. B

für das Quint-Intervall

Centrum	$\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$	292 _{,5}	292 _{,5}	$\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$	Centrum,
kleine Terz	$\frac{6}{5}$	263	322	$\frac{5}{4}$	grosse Terz,
grössere Secunde	$\frac{9}{8}$	170	415	$\frac{4}{3}$	Quarte,
Tonica	1	0	585	$\frac{3}{2}$	Quinte,

für das Quart-Intervall

Centrum	$\sqrt[4]{\frac{4}{3}}$	207 _{,5}	207 _{,5}	$\sqrt[4]{\frac{4}{3}}$	Centrum,
grösste Secunde	$\frac{8}{7}$	193	222	$\frac{7}{6}$	kleinste Terz,
grössere Secunde	$\frac{9}{8}$	170	245	$\frac{32}{27}$	kleinere Terz,
grosse Secunde	$\frac{10}{9}$	152	263	$\frac{6}{5}$	kleine Terz,
kleine Secunde	$\frac{16}{15}$	93	322	$\frac{5}{4}$	grosse Terz,
Tonica	1	0	415	$\frac{4}{3}$	Quarte.

§. 62.

Prüfen wir die im vorigen Tableau vorkommenden 7theiligen Rhythmen oder Intervalle mittelst des Gehörs, so wird man übereinstimmend mit der Theorie die Verhältnisse $\frac{7}{6}$ und $\frac{12}{7}$ als äusserste Grenzen zwischen Consonanz und Dissonanz, die Verhältnisse $\frac{8}{7}$ und $\frac{7}{4}$ schon als bestimmt hervortretende Dissonanzen ansehen, die Verhältnisse $\frac{7}{5}$ und $\frac{9}{7}$ mit ihren Octavcomplimenten $\frac{10}{7}$ und $\frac{14}{9}$ aber in eine noch niedrigere Classe stellen müssen. Man hat mehrmals gewünscht und versucht, das Intervall $\frac{7}{4}$ (die natürliche kleine Septime des Horns, der Trompete u. s. w.) und folglich auch die übrigen aus ihm entspringenden 7theiligen Tonverhältnisse in unser practisches Tonsystem mit einzuführen: wir werden indess §. 87 finden, dass diess bei den Forderungen, denen unser practisches Tonsystem genügen soll und muss, nicht zulässig ist; und dass wir uns daher lediglich auf die nach den Zahlen 2, 3 und 5 abmessbaren Verhältnisse beschränken müssen. Diese sind nach unserm Tableau

1,	$\frac{16}{15}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\sqrt[3]{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{16}{9}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{15}{8}$	2
C	D ^b	D	E ^b	E	F	Centrum	G	A ^b	A	B	H	c		

in welcher Tonreihe die Anzahl aller durch jene Gefühlsmaasse 2, 3, 5 übersehbaren einfachen Rhythmen, folglich auch die Anzahl aller Consonanzen erschöpft ist. Man könnte sie die einfache rhythmische Tonleiter nennen, weil nicht nur alle darin vorkommenden Tonverhältnisse einfach rhythmisch sind, sondern auch, wie die Klammern andeuten, alle diese Verhältnisse wieder in Bezug auf das Centrum der Leiter symmetrisch geordnet liegen. Diese Scala nun ist der Prüfstein oder vielmehr die natürliche Basis aller practischen oder künstlichen Tonsysteme. Sie ist identisch mit unserer auf anderem Wege aufgefundenen reinen Dur- und Moll-Tonleiter §. 52 und ihre Uebereinstimmung zeugt von Neuem für die Richtigkeit der Theorie.

Dass in unsere Dur- und Moll-Tonleiter aus der unendlichen Menge der Intervalle nur die allereinfachsten und wohlgefälligsten aufgenommen worden sind, lässt sich übrigens auch noch auf folgende übersichtliche Weise veranschaulichen. Man muss nämlich die innerhalb der Octave oder zwischen 1 und 2 liegenden einfachsten Tonverhältnisse auch erhalten, wenn man nach und nach zwischen 2 und 4, 3 und 6, 4 und 8 u. s. w. noch diejenigen ganzen Zahlen einführt, welche mit ersteren in einem einfachen rhythmischen Verhältnisse stehen; auch erhellet, dass die dann sich ergebenden Reihen immer mehr neue Intervalle darbieten müssen, deren Wohlgefälligkeit abnehmen wird, je grösser zu ihrer Darstellung das Grundmaass oder die Zahl für den Grundton angenommen werden muss. Diese Reihen können, da sie die Primzahlen 7, 11, 13 u. s. w. ausschliessen, keine anderen sein, als folgende:

1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	oder	c	.	.	.	.	.	.	.	.	c	
2	.	.	.	.	3	.	.	.	.	4		c	.	.	.	.	g	.	.	.	c	
3	.	.	.	4	.	.	5	.	.	6		c	.	.	.	f	.	.	a	.	c	
4	.	.	5	.	6	.	.	.	.	8		c	.	.	e	.	g	.	.	.	c	
5	.	6	.	.	.	8	.	9	.	10		c	.	e ^b	.	.	.	a ^b	.	b	.	c
8	9	.	10	.	12	.	.	.	15	16		c	d	.	e	.	g	.	.	.	h	c
1	$\frac{9}{8}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{15}{8}$	2	oder	c	d	e ^b	e	f	g	a ^b	a	b	h	c

Die Reihe von 6 bis 12 würde keine neuen Verhältnisse gegeben haben und man sieht, dass auch die Reihen 1—2, 2—4, 4—8 hätten weggelassen werden können, weil die in ihnen vorkommenden Intervalle bei der Reihe 8—16 nothwendig ebenfalls mit erscheinen müssen; ich behielt sie hier deshalb bei, um zugleich mit übersehen zu lassen, wie die Intervalle immer weniger consonirend werden, je grösser für sie das Grundmaass oder das erste Glied der Reihe sein muss; für die Pulsverhältnisse von d und h ist die Zahl 8 im Nenner nöthig, während für e^b, a^b und b die Zahl 5, für e die Zahl 4 u. s. w. ausreicht. Man erkennt ferner, dass die Reihen 3—6 und 8—16 für die diatonische Scala hinreichen und durch blosses Einschieben der Reihe 5—10 die vollständige Dur- und Moll-Tonleiter erzeugt wird. Auch wird nun hieraus zugleich die Ursache der Verschiedenheit in dem Character der Dur- und Moll-Scala erhellen: in Dur haben nämlich die charakteristischen grossen Terzen den ruhigeren Rhythmus $\frac{5}{4}$, während die charakteristischen kleinen Terzen in Moll den weniger leicht verständlichen Rhythmus $\frac{6}{5}$ haben (§. 56).

§. 63.

Aus Vorigem erhellet nunmehr auch, dass alle Consonanzen durch den einzigen Accord $\begin{matrix} C & E & G & c & e \\ 4 & 5 & 6 & 8 & 10 \end{matrix}$ auf einmal dargestellt werden, weil in ihm alle einfachen rhythmischen Maasse 2, 3, 5 vereinigt sind; man hat nämlich in

$$\frac{G}{E} = \frac{6}{5}; \quad \frac{E}{C} = \frac{5}{4}; \quad \frac{c}{G} = \frac{4}{3}; \quad \frac{G}{C} = \frac{3}{2}; \quad \frac{c}{E} = \frac{8}{5}; \quad \frac{e}{G} = \frac{5}{3}; \quad \frac{c}{C} = 2.$$

die kl. Terz, gr. Terz, Quarte, Quinte, kl. Septe, gr. Sexte, Octave.

Der blosse Dreiklang C E G ist daher der Stammaccord aller dieser Consonanzen oder die Basis unserer gesamten modernen Harmonie. (S. §. 85).

Hätten wir die 7theiligen Tonverhältnisse mit in unser practisches System aufnehmen wollen, so würde unsere Harmonie auf den Stammaccord $\begin{matrix} C & E & G & K \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix}$ haben begründet werden müssen; wir würden dann in $\frac{K}{C} = \frac{7}{4}$ die kleinste Septime, in $\frac{K}{G} = \frac{7}{6}$ die kleinste Terz, und in deren Octavcomplementen zugleich die Secunde $\frac{8}{7}$ und Sexte $\frac{12}{7}$ erhalten haben.

Viertes Capitel.

Von den Hülfsmitteln zu Versinnlichung der Theorie.

I. Die Sirene.

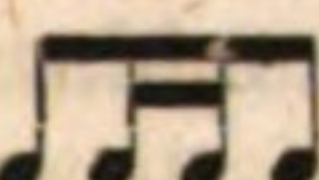
§. 64.

Wenn man eine Scheibe (Fig. 20), auf welcher ein concentrischer Kreis G mit kleinen gleichweit von einander abstehenden Löchern durchbrochen ist, um den Mittelpunkt dieses Kreises sehr schnell und gleichförmig dreht und während ihres Umlaufs mittelst einer engen Röhre einen Luftstrom auf irgend eine Stelle des durchbrochenen Kreises richtet, so wird dieser Strom in stetem gleichförmigen Wechsel unterbrochen und wieder frei gegeben oder in einzelne gleichförmig auf einander folgende Pulse abgetheilt; bei hinreichend schnellem Umlaufe der Scheibe hört man dann einen Ton, dessen Höhe oder Tiefe von der Geschwindigkeit der Aufeinanderfolge dieser Pulse abhängt. Es erhellet leicht, dass eine solche Scheibe das einfachste und sicherste Mittel abgeben müsse, um die Richtigkeit unserer Theorie vollständig zu prüfen. Da man nämlich mehrere Kreise anwenden, die Löcher in beliebiger Menge und Ordnung und von gleicher oder verschiedener Grösse bohren, auch die Scheibe selbst dann beliebig schnell drehen kann, so steht es in unserer Gewalt, mittelst einer solchen Scheibe die Pulse in beliebiger Geschwindigkeit, Ordnung und Stärke aufeinander folgen zu lassen; wir können demnach sämtliche bisher betrachteten Pulsfolgen und Rhythmen in beliebiger Geschwindigkeit darstellen und ihre Wirkungen im Gebiete des Zählbaren und des Kluges sinnlich streng prüfen. Und in der That wird auch dadurch die Richtigkeit der Theorie auf eine eben so anziehende als überzeugende und belehrende Weise bestätigt. Theilt man z. B. vier concentrische Kreise G T Q O Fig. 20 dergestalt gleichförmig ein, dass die Mengen der Löcher sich wie 4, 5, 6, 8 verhalten, so geben diese Kreise beziehentlich die Tonica, grosse Terz, Quinte und Octave in vollkommener Reinheit. Vereinigt man die Löcher der Kreise Q und G auf einem besondern Kreise, wie auf Z geschehen, so erhält man die dem Pulsverhältniss $\frac{3}{2}$ angehörige rhythmische Pulsgruppe Fig. 9 und 15, und es erscheint bei langsamer Drehung der Scheibe zuerst der blosse tonlose Rhythmus  etc., bei schnellerem Drehen aber, wenn derselbe aufgehört hat zählbar zu sein, oder die Pulse sich gleichsam in eine Klanglinie vereinigen, die diesem Rhythmus $\frac{3}{2}$ im Klanggebiete entsprechende Quintconsonanz und zwar stets unverändert und in voller Reinheit, so lange die Scheibe gleichförmig schnell gedreht

wird, in immer höheren oder tieferen Regionen aber, so wie die Schnelligkeit der Drehung zu- oder abnimmt. Bringt man sämtliche vier Theilungsarten der Kreise *G T Q O* auf einem einzigen Kreise *D* an, so erhält man das bereits in Fig. 16 *b* vorgekommene rhythmische System, welches den vollen Durvierklang giebt. Ueberhaupt zeigen sich alle Erscheinungen so, wie sie §. 56 nach der Theorie angedeutet wurden.

Die bekannte Erscheinung, dass ein mit Nägeln, Zähnen oder Oeffnungen versehenes und sehr schnell rotirendes Rad einen höheren oder tieferen Ton erzeugt, wurde zuerst von *Caignard de la Tour* für wissenschaftliche Zwecke benutzt und er nannte seine Vorrichtung *Sirene*. Diesen Namen habe ich auch für obige erweiterte und jetzt noch näher zu beschreibende Einrichtung beibehalten, da die Grundidee dieselbe ist.

Nach Obigem beruht die Fertigung unserer *Sirene* im Wesentlichen bloss darauf, dass man die zu prüfende Pulsfolge auf einem concentrischen Kreise der Scheibe mittelst hinreichend grosser Oeffnungen dergestalt darstelle, dass die Entfernungen dieser Oeffnungen von einander den Zeiten proportional seien, welche zwischen den aufeinanderfolgenden Pulsen verfließen sollen, und dass die Grösse der Oeffnungen dem Gewichte der darzustellenden rhythmischen Accente entspreche. Letzteres ist übrigens bloss für die laufenden und gemischten Rhythmen nöthig, bei den einfachen hüpfenden Rhythmen ist schon die blosse rhythmische Aufeinanderfolge der Pulse hinreichend, um den Accord zu erzeugen, welchem das betreffende rhythmische System angehört. Wie man diese Pulsgruppen am leichtesten zeichnen kann, ist bereits §. 54 gezeigt worden; zu mehrer Deutlichkeit will ich indess hier noch einige allgemeine Andeutungen folgen lassen und dann eine meiner *Sirenen* nach ihren wesentlichsten Theilen selbst beschreiben.

Um die einfachen laufenden Rhythmen in einem ununterbrochenen Flusse darzustellen, bedarf es nichts weiter, als dass man eine gleichmässige Folge von Löchern durch vergrösserte Löcher dergestalt abtheile, dass z. B. bei den Rhythmen $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{1}$, $\frac{4}{1}$ u. s. w. beziehentlich auf je 2, je 3, je 4 u. s. w. Löcher nur ein grösseres kommt. Dass hierbei die Anzahl der Löcher auf den betreffenden Kreisen ein Vielfaches der 2, der 3, der 4 u. s. w. sein müsse, erhellet von selbst. Eben so wird nun an sich klar sein, dass für die zusammengesetzten laufenden Rhythmen und für einen ununterbrochenen Fluss derselben der Kreis eine solche Anzahl gleichweit von einander abstehender Löcher enthalten müsse, welche gerade ein Vielfaches der höchsten Zahl im Rhythmus ist. Zu Darstellung des Rhythmus $\frac{9}{1}$ oder ($\cdot$ $\cdot$ $\cdot$ $\cdot$ $\cdot$ $\cdot$ $\cdot$ $\cdot$ $\cdot$) werden also entweder 9 oder 18 oder 27 u. s. w. Löcher nöthig sein und in jeder solchen Gruppe von 9 Oeffnungen wird dann die erste Oeffnung dem schwerern Accente ($\cdot$), die 4te und 7te aber dem schwächern Accente ($\cdot$) entsprechen müssen. Um die hüpfenden Rhythmen, z. B. den Rhythmus $\frac{3}{2}$ darzustellen, theile man den betreffenden Kreis zuerst in so viel gleiche Theile ein, als er dergleichen Rhythmen fassen kann, ohne dass die Löcher zu nahe aneinander zu stehen kommen. Jeden solchen Haupttheil theile man dann wieder in 2 und darauf wieder in 3 gleiche Theile und durchbohre endlich die so erhaltenen Theilpunkte. Man wird dann eine Pulsfolge wie auf dem Kreise *Z* Fig. 20 erhalten, welche obigen Rhythmus $\frac{3}{2}$ oder  darstellt. Auf ähnliche Weise lassen sich alle übrigen dergleichen Rhythmen $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{6}{5}$ u. s. w. zeichnen. Eben so erhält man auch in stetigem Flusse die gemischten Rhythmen, z. B. den Rhythmus (4, 5, 6, 8) wenn man einen Kreis zuerst in eine angemessene Anzahl gleichgrosser Haupttheile zerlegt und dann jeden derselben nach und nach wieder in 4, 5, 6 und 8 gleiche Theile eintheilt, die Theilpunkte markirt und die diesem Rhythmus (Fig. 16 *b*) angehörigen Accente durch grössere Oeffnungen auszeichnet. Jeder verlangte Accord lässt sich auf diese Art auf einem einzigen Kreise darstellen. Für den Moll-Vierklang *C E^b G c* hätte man z. B. die Pulsverhältnisse 1, $\frac{6}{5}$, $\frac{3}{2}$, 2 oder 10, 12, 15, 20 in ganzen Zahlen: man würde also den Kreis zuerst in 10 oder in 2 mal 10, 3 mal 10 u. s. w. Haupttheile zu zerlegen, dann wegen der kleinen Terz je 5 solcher Haupttheile (d. i. die Bogen-Länge, welche 5 solche Haupttheile zusammen genommen einnehmen) in 6 gleiche Theile, ferner wegen der Quinte je 2 solcher Haupttheile in 3 gleiche Theile und endlich wegen der Octave jeden solchen Haupttheil noch in 2 gleiche Theile einzutheilen, sämtliche Theilpunkte zu durchstechen und die auf den Hauptradien liegenden Oeffnungen etwas grösser als die übrigen zu machen haben, damit sich die *Tonica* von der Octave unterscheide.

§. 65.

Eine meiner *Sirenen* hat folgende Einrichtung. Die Scheibe ist von starker Buchbinderpappe und hat ungefähr 13 par. Zoll im Durchmesser. Auf selbiger sind 23 concentrische ungefähr $2\frac{1}{2}$ par. Linien von einander entfernte Kreise gezogen, so dass der kleinste Kreis beinahe 3 par. Zoll im Durchmesser behielt. Die innern 12 Kreise sind nach einander in 6, 9, 12, 15, 18, 24, 30, 36, 48, 60, 72 und 96 gleiche Theile eingetheilt und in den Theilpunkten durchstoichen. Wären die Oeffnungen von gleicher Grösse, so würden diese Kreise bloss eine einfache Tonfolge wie *C G c e g c e g c e g c* darstellen: da aber alle auf den ersten sechs Hauptradien liegende Oeffnungen oder mit andern Worten alle um den sechsten Theil des Kreisumfangs von einander abstehenden Löcher vergrössert worden sind, so geben diese Kreise nunmehr die laufenden Rhythmen

[illegible]

welche auch in der hier angegebenen Region erscheinen, wenn die Scheibe 11 mal in einer Zeitsecunde rotirt, weil dem grossen C nahe genau 66 Pulse in einer Secunde zukommen.*)

Auf den folgenden fünf Kreisen sind die Rhythmen $\frac{5}{4}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{7}{4}$ oder die Verbindungen des Grundtons mit seiner grossen Terz, Quarte, Quinte, gr. Sexte und kleinsten Septime gezeichnet, was auf folgende Weise geschah. Dem gemeinschaftlichen Grundtone wurden 24 Oeffnungen gegeben, um ihn in harmonischer Beziehung mit den vorigen Zweiklängen zu erhalten, d. h. es wurde jeder dieser 5 Kreise zuerst in 24 gleiche Haupttheile zerlegt. Dann wurden auf dem Terzkreise ($\frac{5}{4}$) je 4 solcher Theile wieder in 5 gleiche Theile, auf dem Quartkreise ($\frac{4}{3}$) je 3 solcher Haupttheile wieder in 4 gleiche Theile, auf dem Quintkreise ($\frac{3}{2}$) je 2 solcher Haupttheile wieder in 3 gleiche Theile u. s. w. eingetheilt und alle so erlangten Theilpunkte zuletzt in gleich grosse Oeffnungen verwandelt um damit den Beweis zu liefern, dass bei den einfachen hüpfenden Rhythmen schon die blosserhythmische Aufeinanderfolge gleichstarker Pulse die entsprechenden Tonverbindungen erzeugt. Auf den nächstfolgenden beiden Kreisen (dem 18ten und 19ten) sind der Quartsextenaccord und der Durvierklang oder die Rhythmen (3, 4, 5, 6) und (4, 5, 6, 8) und zwar ebenfalls wieder dergestalt gezeichnet, dass jeder Kreis zuerst in 24 gleiche Haupttheile zerlegt und dann auf dem Kreise des Quartsexten-Accords je 3 solcher Haupttheile nach und nach in 4, 5 und 6 kleinere gleiche Theile, auf dem Kreise des Durvierklanges aber je 4 solcher Haupttheile nach und nach wieder in 5, 6 und 8 kleinere gleiche Theile zerlegt und sämmtliche Theilpunkte dann durchstochen wurden. Ausserdem sind noch auf den vier äussersten Kreisen die Rhythmen (3, 4, 5) und (4, 5, 6) und ihre Verdopplung oder ihre Darstellung in der nächst höhern Region angebracht.

In Betreff der beiden Kreise für den Quartsexten-Accord und Durvierklang ist übrigens zu erwägen, dass sich bei gleicher Grösse aller Oeffnungen die Pulse des Grundtones von den Pulsen der Octave nicht unterscheiden können, weil dieses Intervall zu den laufenden Rhythmen gehört und folglich die Pulse des Grundtons durch grössere Löcher bemerklich gemacht werden müssten, wenn man dieselben neben seiner Octave mit erhalten wollte. Lässt man aber, wie auf dieser Sirene geschehen, die Oeffnungen von einerlei Grösse, dann hat man bei Beobachtung des Accords dasjenige zu berücksichtigen, was §. 68 über das Miterscheinen der Combinationstöne erklärt werden wird. Jene Rhythmen werden nämlich bei gleicher Grösse aller Oeffnungen oder bei gleicher Stärke aller Pulse, statt der Grundtöne der Accorde die entsprechenden Combinationstöne mit hören lassen, und daher eine Erscheinung wie folgende

geben. Die den Noten beigeetzten Ziffern bezeichnen die Pulsverhältnisse der Töne. Da ferner auch die übrigen einfachen hüpfenden Rhythmen die ihnen zugehörigen Combinationstöne mit erzeugen, so giebt die beschriebene Sirene überhaupt nachstehende Zweiklänge und Accorde und zwar auch in der hier angegebenen Region wenn die Scheibe 11 mal in 1 Secunde rotirt:

Die beigezeichneten Ziffern bezeichnen wieder die Pulsverhältnisse der Töne. Auf dieser Scheibe sind bloss rhythmische Systeme (§. 54) gezeichnet und zwar alle Anfänge auf einerlei Radius genommen worden, um zugleich eine allgemeine Anschauung von der regelmässigen Aufeinanderfolge der Pulse zu erhalten. Auf einer andern Scheibe wurden dann die Pulsreihen für die zum Durvierklang gehörigen Töne dergestalt gezeichnet, dass ihre Anfänge nicht zusammenfielen; die gleichzeitige Intonirung zweier oder mehrerer solcher Kreise gab dann die rhythmische Periode und ihre Wirkung. Eine dritte Scheibe enthält die reine diatonische Tonleiter oder 8 Kreise mit respective 24, 27, 30, 32, 36, 40, 45, 48 Löchern, ferner die beiden Moll-Accorde 1, 3^b, 5, 8 und 1, 4, 6^b, 8 oder die Rhythmen (30, 36, 45, 60) und (30, 40, 48, 60); eine vierte die harmonische Tonleiter (§. 48) u. s. w.

*.) In meiner Abhandlung „Ueber die Natur der Musik“ §. 8 sind für dieses C irrigerweise die doppelte Menge, nämlich so viel Pulse angenommen worden, als diesem Tone, nach *Chladni'scher* Art zu zählen, Saitenschwingungen zukommen.

Zum Drehen der Scheibe dient die einfache Vorrichtung Fig. 17. Die Scheibe *a* ist auf eine stählerne Spindel gesteckt und an einer auf der Spindel festgeschlagenen kleinen Messingscheibe *b* mittelst zweier (oder drei) Schrauben befestigt. Die Spindel läuft auf den Spitzen zweier Schrauben *d*, welche in der hölzernen Gabel *A* eingeschoben sind. Der Rahmen *B* enthält das durch eine Kurbel in Bewegung zu setzende Rad *R* und hat unten die Einrichtung, dass er an ein Tischblatt befestigt werden kann. Oben befindet sich ein Zapfenloch zu Aufnahme des Gabelzapfens *e*. Ueber das Rad *R* und über eine an der Spindel befindliche kleine Welle *c* läuft endlich eine Schnur, welche dadurch gespannt wird, dass man die Gabel so weit als nöthig in die Höhe schiebt und dann mit der Holzschraube *f* feststellt. Den Luftstrom braucht man nur durch einen Federkiel gegen die durchbrochenen Kreise der Scheibe zu blasen; die Oeffnung des Kiels darf indess nicht viel grösser sein als die Löcher auf der Scheibe, auch hat man beim Blasen diese Oeffnung des Kiels nahe an die Scheibe zu halten. Auf der hier beschriebenen Sirene sind die Löcher ungefähr $\frac{3}{4}$ par. Linie im Durchmesser. Zeichnet man nicht allzuviel auf eine Scheibe oder wählt man letztere selbst grösser, so kann man auch die Löcher für die Pulse grösser machen und dadurch noch stärkere Klänge erhalten. *)

Je sorgfältiger und genauer die Eintheilung und Durchbohrung der Scheibe bewirkt wird, desto vollkommener erscheinen natürlich auch die Klänge. Ein minder sorgfältiges Verfahren wird zwar die verlangten Ton-Verbindungen ebenfalls unzweifelhaft deutlich geben, aber doch nicht so rein und schön, als sie erlangt werden können. Insbesondere ist auch für die ruhige Rotation der Scheibe noch nöthig, dass sie möglichst richtig centrirt sei, weil wegen der schnellen Umdrehung aus der geringsten Excentricität ein sehr störendes Schleudern der Maschine entsteht. Da nöthig, muss man also die Excentricität der Scheibe an der geeigneten Stelle durch ein Gegengewicht beseitigen.

§. 66.

Nach dem Vorigen könnte es scheinen, dass jede rhythmische Pulsgruppe, des ununterbrochenen Flusses wegen, stets eine ganze Anzahl mal auf dem betreffenden Kreise vorkommen müsse, dass man daher, wenn mehrere Tonverbindungen in Bezug auf einerlei Grundton dargestellt werden sollen, alle dazu erforderlichen Kreise zuerst in eine solche Anzahl gleich grosser Haupttheile zu zerlegen habe, in welcher die Nenner oder die kleinsten Zahlen der vorgegebenen Rhythmen, ein jeder für sich, genau aufgehen, und dass man folglich zur Darstellung der Rhythmen



mindestens 60 solcher Haupttheile oder Pulse für den Grundton nöthig haben werde. Folgende Betrachtung wird jedoch zeigen, dass eine solche Anordnung nicht unerlässlich erfordert wird. Wenn auf einem Kreise *R* Fig. 20 der Abstand *a b* der Löcher kein aliquoter Theil des Kreises ist, so wird der Abstand der letzten Oeffnung *q* vom Anfangspuncte *a*, oder die Weite *q a*, kleiner werden als die normale Weite *a b*. Auch eine solche Pulsfolge wird aber einen bestimmten Ton geben müssen. Noch vor dem Eintritte des Zeitmoments, mit welchem sich die der Pulsreihe *a b c . . . q* zugehörige Zeitdauer endigt, tritt nämlich in Folge der stetigen Rotation der Scheibe eine der vorigen völlig gleiche Pulsreihe *a b c . . . q* wieder auf, so dass also hier gleichsam eine sich stets wiederholende Ineinanderschiebung gleichartiger Pulsreihen, oder, noch vor dem jedesmaligen Aufhören des Tones, ein stetes Wiedereintreten des nämlichen Tones von derselben Qualität und Stärke vorkommt, folglich keine Unterbrechung des herrschenden Eindrucks wahrgenommen werden kann. Das Nämliche muss auch für die rhythmischen Pulsreihen gelten, und es müssen sich daher irgend welche, selbst irrationale Pulsverhältnisse, mit hinreichender Genauigkeit auf der Sirene darstellen lassen, was auch die Erfahrung vollkommen bestätigt. Wenn folglich eine vorgegebene Anzahl Rhythmen oder Tonverbindungen in Bezug auf einerlei Grundton auf eine Scheibe gezeichnet werden sollen, so sind die zu erfüllenden Hauptbedingungen nur diese: dass man alle Kreise anfänglich in eine beliebige, jedoch der Grösse der Scheibe angemessene Anzahl gleich grosser Haupttheile eintheile, und dann auf jedem einzelnen Kreise diejenige Anzahl Haupttheile, welche der Nenner des für den betreffenden Kreis bestimmten Rhythmus angiebt, wieder genau in so viele gleiche Theile zerlege, als der Zähler oder die übrigen Zahlen dieses Rhythmus anzeigen. Diese Theilung setzt man dann weiter fort, bis man wieder zum Anfangspuncte kommt, worauf sämtliche Theilpuncte durchstochen werden.

*) Bei meinen grösseren Sirenen, auf welchen ich unter andern (nach §. 67) 2 Octaven der 19stufigen gleichschwebend temperirten Scala dargestellt habe, sind die Scheiben $1,75$ par. Linien stark und die konischen Oeffnungen von 2 und $1\frac{1}{2}$ par. Linien Durchmesser mittelst scharfer stählerner Locheisen durchstochen worden. Die Klänge sind ausnehmend deutlich und weithin vernehmlich.

§. 67.

Sollen nur einzelne Töne oder bloss Tonleitern auf die Sirene gezeichnet werden, z. B. die Töne des Tableau's §. 61, so würde man sämtliche dazu erforderlichen Kreise erst in so viele einzelne Theile eintheilen, als man für den Grundton der Scala Pulse annehmen will und nach Maassgabe der Grösse der Scheibe annehmen kann; dann würde man z. B. für die grösste Secunde $\frac{8}{7}$ je 7 solcher Haupttheile in 8 gleiche Theile, für die kleinste Terz $\frac{7}{6}$ je 6 solcher Haupttheile in 7 gleiche Theile u. s. w. einzutheilen, jedoch nur diejenigen Theilpunkte zu durchstechen haben, welche man bei dieser zweiten speciellen Eintheilung erhielt, indem die erste Haupteintheilung nur als Hülfsmittel für die eigentliche Eintheilung diene.

Sind aber, wie bei den später vorkommenden gleichschwebend temperirten 12- und 19stufigen Scalen, die Tonverhältnisse mit der nöthigen Genauigkeit nur in sehr grossen ganzen Zahlen (s. Tafel III.) darstellbar, dann dient folgendes Verfahren. Wenn bei der 19stufigen Scala dem Tone C eine Anzahl von 1000 Pulsen zukommen, so muss C $\sharp$ deren 1037 haben, oder wenn C = 10 Pulse erhält, so müssen für C $\sharp$ = $10\frac{37}{100}$ Pulse gezeichnet werden. Der Abstand der Oeffnungen auf dem C $\sharp$ Kreise wird also einem Kreisbogen von $\frac{360^\circ}{10,37} = \alpha$ angehören und hieraus findet sich dann für den, dem Ueberschusse $\frac{37}{100}$ zukommenden Bogen der Werth $\frac{37}{100} \alpha = \beta$. Um also die Oeffnungen auf dem C $\sharp$ Kreise in gehörigem Abstände von einander anzugeben, würde man zuerst den Kreisbogen β mittelst seiner Chorde zu bestimmen, und dann den Rest des Kreises in 10 gleiche Theile zu theilen haben, deren Grösse die Chorde des Bogens α angiebt. Auf ähnliche Weise lassen sich die Kreise für die übrigen Töne eintheilen. Folgende Tafel enthält die Data zur Eintheilung der Sirene für die gleichschwebend temperirten 12- und 19stufigen Scalen; die Chorden der Bogen α und β sind für den Kreishalbmesser = 1000 angegeben.

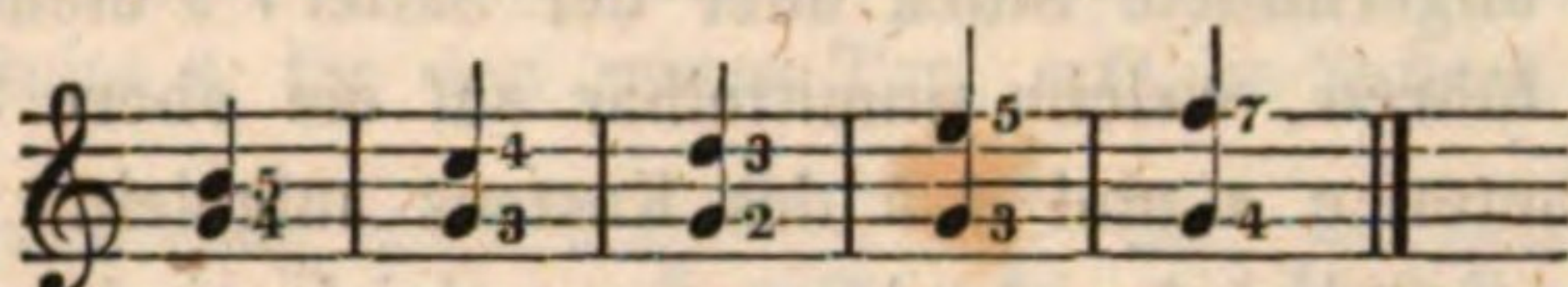
Für die 19stufige Scala.				Für die 12stufige Scala.			
Töne.	Pulsverhältnisse.	Chorden d. Bogen		Töne.	Pulsverhältnisse.	Chorden d. Bogen	
		α	β			α	β
C	10,	618,0	0,	C	10,	618,0	0,
C $\sharp$	10,37	596,6	224,7	C $\sharp$	10,59	584,1	353,8
D $\flat$	10,76	575,8	438,6				
D	11,15	555,8	88,4	D	11,22	552,7	123,1
D $\sharp$	11,57	536,4	308,9	E $\flat$	11,89	522,3	466,0
E $\flat$	12,00	517,6	0,				
E	12,45	499,5	225,2	E	12,60	493,5	298,1
E $\sharp$ F $\flat$	12,91	481,9	439,3	F	13,35	466,3	164,5
F	13,39	465,0	182,8				
F $\sharp$	13,89	448,6	398,6	F $\sharp$	14,14	440,7	62,2
G $\flat$	14,40	432,8	175,6				
G	14,94	417,5	392,0	G	14,98	416,4	408,1
G $\sharp$	15,49	402,8	199,6	A $\flat$	15,87	393,3	342,8
A $\flat$	16,07	388,5	26,6				
A	16,67	374,8	250,7	A	16,82	371,4	305,1
A $\sharp$	17,28	361,5	103,4	B	17,82	350,8	288,1
B	17,93	348,7	323,5				
H	18,59	336,3	200,0	H	18,88	331,3	291,8
H $\sharp$ c $\flat$	19,28	324,4	92,5	c	20,	312,9	0,
c	20,	312,9	0,				

Die Eintheilung selbst geschieht dann leicht auf folgende Weise. Nachdem man vom Mittelpunkte der Scheibe aus in den geeigneten Entfernungen die für die verlangte Scala nöthigen concentrischen Kreise gezogen hat, beschreibe man ausserdem noch einen besonderen grösseren concentrischen Kreis und theile dessen Halbmesser in 1000 gleiche Theile, oder man nehme gleich anfangs einen bereits vorhandenen (hinreichend grossen) 1000theiligen Maassstab zum Halbmesser dieses Hülskreises an. Von einem beliebigen Punkte x dieses Kreises aus trage man auf selbigem diesseits die Chorden α , jenseits die Chorden β auf, und bemerke bei jedem Chordenendpunkte, zu welchem Tonkreise er gehört. Zieht man dann aus dem Nullpunkte x und aus den Endpunkten der Chorden gerade Linien nach dem Centro der Scheibe, so ergeben sich auf den betreffenden Kreisen diesseits der Bogen α oder der

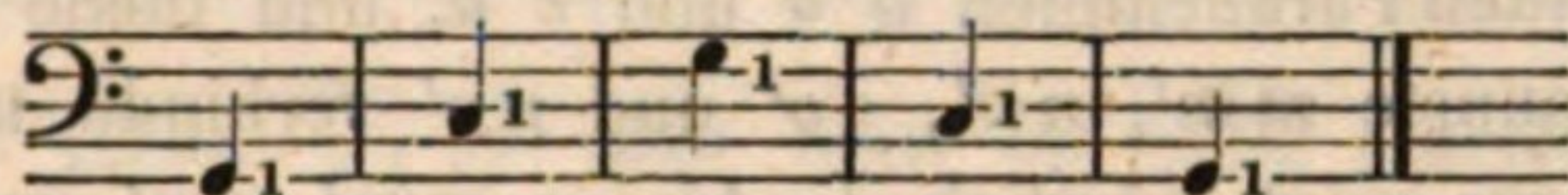
verlangte Löcherabstand, jenseits der Ueberschussbogen β , welcher letztere bloss zur Prüfung der Eintheilung dient; der Bogen oder die Chorde α muss sich nämlich auf dem betreffenden Kreise vom Nullpuncte x aus genau so oft herumtragen lassen, als die ganze Zahl in dem Pulsverhältnisse des betreffenden Tones anzeigt und es muss zuletzt der Bogen β als Rest übrig bleiben. Wenn z. B. bei der 19stufigen Scala auf dem Tonkreise G die Chorde $\beta = 392$ von x aus bis zu einem Puncte y reicht, so muss dann die Chorde $\alpha = 417,5$ von y aus weiter fort bis wieder zum Puncte x sich genau 14 mal in diesem Kreise herumtragen lassen. Meistens wird man eine kleine Abweichung finden, welche von der nicht absolut genau zu treffenden Zirkelweite oder Chordenlänge, von einem Mangel an Feinheit der Kreislinie, von der Unvollkommenheit der Ebene der Pappfläche u. s. w. herrührt; diese Abweichung aber wird sich stets sehr bald beseitigen lassen, besonders wenn man einen Federzirkel anwendet. Die auf diese Weise bestimmten Löcher kann man dann durch Halbierung ihrer Abstände von einander verdoppeln u. s. w. um die Scala, ohne die Scheibe schneller drehen zu müssen, in einer höhern Tonregion zu erhalten.

§. 68.

Merkwürdig ist es, dass die rhythmischen Systeme, wie z. B.



ausser diesen Zweiklängen auch noch die zugehörigen Combinationstöne (§. 40) nämlich



und zwar völlig deutlich selbst dann mit erscheinen lassen, wenn auch die zusammenfallenden Anfangspulse durch vergrösserte Löcher nicht besonders hervorgehoben werden. Erwägt man indess, dass in jedem hüpfenden Rhythmus, z. B. in dem Rhythmus $\frac{3}{2}$ oder in der Figur  selbst dann, wenn die Pulse gleich stark sind, sich doch stets die mit einem Puncte bezeichneten Pulse als Anfänge des Rhythmus im blossen Gefühle hervorstechend ankündigen und ankündigen müssen, weil das Gefühl hier den Zeitfluss nach der Wiederkehr jeder solchen Figur abmisst, so erklärt sich jene Erscheinung nicht nur völlig befriedigend, sondern sie giebt zugleich einen neuen Beweis dafür ab, dass das Gefühl auch bei unzählbar schneller Folge gleichstarker Pulse noch den Rhythmus derselben empfinden muss.

Ueberhaupt scheint jedes durch gleichgrosse Löcher dargestellte System hüpfender Rhythmen zugleich denjenigen Ton mit zu erzeugen, welcher der Geschwindigkeit der Aufeinanderfolge oder der Wiederholung dieser Systeme entspricht, was mit der Theorie der Combinationstöne (§. 40) übereinstimmen würde. Sollte sich diess allenthalben bestätigen, so könnte man die aus einem gewissen Pulsverhältnisse entstehende Zeitfigur gleichsam als das Element des jenem Verhältnisse zukommenden Klanges betrachten und dann sagen: das Element des einfachen Klanges ist der blosse einfache Puls, der Klang selbst eine stetige Reihe solcher Elemente, deren Anzahl zugleich die Höhe des Klanges bestimmt; das Element des mehrfachen Klanges ist eine Gruppe von Pulsen, eine stetige Reihe solcher Gruppen bildet den zusammengesetzten Klang und ihre Anzahl misst der miterscheinende Combinationston, welcher letztere in die sogenannten Battemens (§. 40) übergeht, wenn die Geschwindigkeit der Elementargruppen in das Gebiet des Zählbaren herabsinkt.

§. 69.

Auf eine interessante Weise erklärt sich nun auch, wie es möglich ist, dass wir verschiedene gleichartige Töne zu einerlei Zeit hören und unterscheiden können; es dürfen nämlich die Klangpulse nur rhythmisch auf einanderfolgen um in unserm Obre mehr als einen Ton, etwas von der blossen Monotonie oder dem einfachen Klange Verschiedenes zu erzeugen. Von Personen, denen der Gebrauch ihres Gesichts erst in späteren Jahren durch die Kunst verschafft werden konnte, ist bekannt, dass sie über das was sie sahen erst nach und nach richtig urtheilen lernten, nachdem sie mit Hülfe der übrigen Sinne, insbesondere des Gefühls, den Total-Eindruck gleichsam erst zergliedert oder in seine verschiedenen Bestandtheile zerlegt hatten. Etwas Aehnliches würde man wahrscheinlich an einem in frühester Jugend Taubgewordenen beobachten, wenn ihm das Gehör in reiferem Alter plötzlich wieder verschafft werden könnte. Er würde höchst wahrscheinlich einen consonirenden Accord anfänglich nur als etwas Wohlgefälliges überhaupt bezeichnen, nicht aber sogleich auch erkennen, dass er aus verschiedenen Bestandtheilen zusammengesetzt sei. Erst dann, nachdem ihm die vereinigten Töne einzeln vorgestellt worden, dürfte er sie auch im Accorde unterscheiden lernen. Wer dagegen von Jugend auf an die Unterscheidung der einzelnen Töne gewöhnt worden, wird die Wirkung einer rhythmischen Klangpulsreihe oder einen musikalischen Accord sogleich als eine Vereinigung verschiedener Töne oder verschiedener Klangwellen erkennen.

II. Monochord, Tonmesser.

§. 70.

Zu Versinnlichung und Erläuterung der Theorie dient vorzüglich auch das sogenannte Monochord oder eine auf einem Kasten ausgespannte Saite, welche man durch bewegliche Stege in beliebige Theile abtheilen kann. Es ist vortheilhafter, mehre, wenigstens 4 Saiten anzuwenden, um einen ganzen Accord zugleich darstellen zu können und in dieser Ausdehnung wird dem Instrumente schicklicher der Name Tonmesser beigelegt werden können. Da es nicht nur an sich interessant und belehrend ist, die Theorie auch an diesem Instrumente vollkommen bestätigt zu finden, sondern auch zu gehöriger Beurtheilung des Folgenden fast unerlässlich ist, dass man sich von der Grösse der verschiedenen Intervalle und Abweichungen eine sinnliche Vorstellung verschaffe, so will ich hier eine einfache Einrichtung eines solchen Tonmessers angeben.

Ein länglich-viereckiger aus dünnen Brettchen zusammengeleimter Kasten Fig. 12 wird durch die an den Enden *A* und *B* eingesetzten Seitentheile von hartem Holze zusammengehalten, welche letztere Einsätze zugleich als Saitenhalter dienen; auf *B* befinden sich oben 4 Knöpfe zum Befestigen der Saiten und an der äusseren Seite von *A* die 4 Wirbel zum Stimmen. Das abgerundete Stück oder der Sattel *rs* dient, um die Saiten von den Wirbeln aus über die Stege *c d* und *a b* zu führen, welche unmittelbar auf die obere Seite des Kastens oder auf den Resonanzboden, rechtwinklig auf die Kanten *c a* und *d b* des Kastens aufgeleimt werden, so dass sie einander genau parallel liegen oder die Abstände *c a* und *d b* einander genau gleich sind. Vor dem Aufleimen der Stege ziehe man auf dem Resonanzboden die beiden Parallellinien *a b* und *c d*, und theile jede derselben in fünf gleiche Theile $am = mn = no$ etc. Die Theilpunkte *mm'*, *nn'*, *oo'* und *pp'* verbinde man dann durch gerade Linien und theile diese dann so ein, wie die Figur zeigt, nämlich die Linien *mm'*, *nn'* und *oo'* in die zu Erzeugung der gewöhnlichsten Intervalle nöthigen rationalen Theile der Saite, die letzte Linie *pp'* aber in 100 gleiche Theile.*) Dann werden die festen Stege genau auf die Linien *ab* und *cd* aufgeleimt und die Orte der Knöpfe und Wirbel dergestalt bestimmt, dass die Saiten über jene vier Linien *mm'*, *nn'* etc. zu liegen kommen. Es versteht sich, dass die innern Seitenflächen der Stege *mp* und *m'p'* genau rechtwinklig auf ihrer aufgeleimten Bodenfläche stehen müssen, damit ihre obern Kanten genau über den Linien *ab* und *cd* liegen. Die beweglichen Stege zum Abtheilen der Saiten können die Form eines Prisma Fig. 11 erhalten, dessen Grundfläche $\triangle xvw$ ein gleichschenkliges Dreieck ist. Der Punct *x* in der obern scharfen Kante wird dann genau über der Mitte der Grundlinie *vw* liegen und es ist diese Mitte durch eine von der Spitze *x* herabgezogene senkrechte Linie *zx* auf beiden Dreieckflächen des Steges zu bezeichnen. Von *x* aus nimmt man dann auf beiden Seiten, nach *w* und *v* zu, eine Länge $= \frac{1}{100}$ der Linie *pp'* und theilt solche in 10 kleinere gleiche Theile, welches dann Tausendtheilchen der Linien *mm'*, *nn'* u. s. w. sind. Es dürfen übrigens diese beweglichen Stege nur wenig höher sein als die festen Stege, damit durch ihr Einsetzen die Spannung der Saiten nicht merklich vermehrt werde.

Beim Gebrauche des Tonmessers müssen erst alle 4 Saiten genau auf einerlei Ton gestimmt werden, dann setzt man die Stege so ein, dass die beiden Linien *zx* genau auf den Theilstrich zu stehen kommen, welcher dem verlangten Tone oder Intervalle angehört. Der Gebrauch der kleinern Eintheilung auf den beweglichen Stegen ist folgender. Will man nämlich einen Ton angeben, dessen Saitenlänge auf den Linien *m*, *n*, *o* nicht vorkommt, so drücke man seine Saitenlänge in Tausendtheilchen der Einheit aus. So würde man z. B. für die übermässige Terz, welcher $\frac{9}{125}$ Saitenlänge zugehören, 768 Tausendtheilchen finden.***) Diese Länge auf der Linie *pp'* abzumessen, setzt man den Steg zwischen die Zahlen 760 und 770 so ein, dass, auf der Stegeintheilung gezählt, von der Zahl 760 an bis zum Puncte *x* des Steges noch 8 Theile zu liegen kommen. Wie diese Stegtheilung nächst dem noch dient, um damit die kleineren canonischen Intervalle (§. 49) so wie die bei den Temperaturen vorkommenden Abweichungen abzumessen, wird aus Folgendem erhellen.

§. 71.

Sei *CD* Fig. 10 eine gespannte Saite, welche, bis auf *aD* verkürzt, irgend ein Intervall zum Tone der ganzen Saite *CD* angebe; *bD* die Länge der Saite, welche einen tieferen Ton angiebt, der von dem Tone der Saite *aD* um den Logarithmen *l* abweicht. Kürze halber wollen wir $CD = 1$, $aD = L$, $ab = n$ setzen, wo dann

*) Noch vollständiger kann man den Tonmesser machen, wenn man auf *mm'* die Saitenlängen für die enharmonische Scala, auf *nn'* die Saitenlängen für die gleichschwebend temperirte 12stufige, und auf *oo'* die Längen für die 19stufige Scala nach den Angaben der III. Tafel zeichnet; auch kann man nach §. 142 die Berührungsstellen für die Flageolet-Töne auf einer besonderen Linie mit angeben. Zwischen je zwei Saiten bringt man dann eine besondere Scala an, welche alle auf *mm'*, *nn'* und *oo'* vorkommenden Theilpunkte zusammen enthält.

**) Man darf deshalb nur 3 Nullen an den Zähler des Bruches anhängen und dann mit dem Nenner dividiren; geht die Division nicht auf und ist der letzte Rest grösser als die Hälfte des Divisors oder Nenners, so nehme man die letzte Ziffer im Quotienten um eine Einheit grösser.

$bD = L + n$ ist. Die Pulszahlen der Saiten aD und bD werden dann sein: $\frac{CD}{aD}$ und $\frac{CD}{bD}$ oder $\frac{1}{L}$ und $\frac{1}{L+n}$; und hieraus ergibt sich dann für den Exponenten des zwischen den Tönen der Saiten bD und aD liegenden Intervalles der Werth $\frac{1}{L} : \frac{1}{L+n} = \frac{L+n}{L} = 1 + \frac{n}{L}$. Dieser Exponent ist nun der zum Logarithmen l gehörigen

natürlichen Zahl gleich: setzt man also letztere $= N$ oder $\log. N = l$, so hat man $N = 1 + \frac{n}{L}$, woraus endlich $n = (N - 1) L$. So gehört z. B. zum Logarithmen des grossen Comma an 18 die natürliche Zahl $N = 1,0126$. Für eine um dieses Comma tiefere Quinte hätte man folglich, weil der reinen Quinte $\frac{2}{3}$ Saitenlänge zukommen, $n = (1,0126 - 1) \frac{2}{3} = 0,008$. Setzt man also auf der Saite I die reine Quinte und rückt auf der andern Saite II den Steg um 0,008 der Linie pp' oder um 8 Theilchen des Stegmaassstabes von der wahren Quintlinie nach A zu, so wird die Saite II eine um das grosse Comma tiefere Quinte als die Saite I angeben. Genauer genommen ist eigentlich obiges Product $= 0,0084$ und man hätte also $8\frac{4}{10}$ Theilchen zu nehmen; der Unterschied ist jedoch nicht beachtenswerth.

Die nämliche Formel dient, wenn man einen um ein kleines Intervall abweichenden höheren Ton erzeugen will. Dann würde nämlich bD die Saite L für den reinen Ton, aD die Saite $L - n$ für den abweichenden höheren Ton sein, und der Exponent der Abweichung wäre $= \frac{1}{L-n} : \frac{1}{L} = \frac{L}{L-n} = 1 + \frac{n}{L} + \frac{n^2}{L^2} + \frac{n^3}{L^3} + \frac{n^4}{L^4} + \dots$. Für so geringe Abweichungen ist aber n in Bezug auf L stets eine sehr kleine Grösse und es verschwinden die Werthe der Glieder $\frac{n^2}{L^2}$, $\frac{n^3}{L^3}$... etc. gegen $\frac{n}{L}$, so dass man als völlig hinreichend hier ebenfalls bloss $1 + \frac{n}{L}$ für den Exponenten der Abweichung annehmen kann.

§. 72.

Da wir in der Folge die Zulässigkeit verschiedener Abweichungen von der Reinheit der Töne zu beurtheilen haben werden, so will ich die zu unsern Logarithmen 1 bis 20 gehörigen natürlichen Zahlen hier anführen.

Log.	N	Log.	N	Log.	N	Log.	N
1	1,0007	6	1,0042	11	1,0077	16	1,0112
2	1,0014	7	1,0049	12	1,0084	17	1,0119
3	1,0021	8	1,0056	13	1,0091	18	1,0126
4	1,0028	9	1,0063	14	1,0098	19	1,0133
5	1,0035	10	1,0070	15	1,0105	20	1,0140

Aus der Formel $n = (N - 1) L$ geht hervor, dass man bloss die Dezimaltheile der obigen mit N bezeichneten natürlichen Zahlen mit der Saitenlänge desjenigen Tones zu multipliciren braucht, an welchem man die verlangte Abweichung versuchen will; das Product giebt dann die gesuchte Stegverrückung in Theilen des Stegmaassstabes, wobei die 4te Dezimalziffer Zehnthelchen dieses Maassstabes bedeutet. Z. B. für eine Abweichung von $\frac{6}{1000}$ Octave hätte man

bei der gr. Terz	$n = 0,0042 \times \frac{4}{5} = 0,0033$	oder $3\frac{3}{10}$	} des Stegmaass-
„ „ Quinte	$n = 0,0042 \times \frac{3}{5} = 0,0028$	„ $2\frac{8}{10}$	
„ „ Octave	$n = 0,0042 \times \frac{1}{2} = 0,0021$	„ $2\frac{1}{10}$	

Folgende Tafel enthält eine Uebersicht der Stegverrückungen für die hauptsächlichsten Intervalle und für die angegebenen Abweichungen, in Theilen des Stegmaassstabes.

Abweichung in Logar.	Stegverrückungen für die Intervalle:								
	3 ^b	3	4	5	6 ^b	6	7 ^b	7	8 ^{va}
2	1,2	1,1	1,0	0,9	0,9	0,8	0,7	0,7	0,7
4	2,3	2,2	2,1	1,9	1,7	1,7	1,6	1,5	1,4
6	3,5	3,3	3,1	2,8	2,6	2,5	2,3	2,2	2,1
8	4,7	4,5	4,2	3,7	3,5	3,3	3,1	3,0	2,8
10	5,8	5,6	5,2	4,6	4,4	4,2	3,9	3,7	3,5
12	7,0	6,7	6,3	5,6	5,2	5,1	4,7	4,5	4,2
14	8,2	7,8	7,3	6,5	6,1	5,9	5,5	5,2	4,9
16	9,3	8,9	8,4	7,4	7,0	6,7	6,3	5,9	5,6
18	10,5	10,1	9,4	8,4	7,9	7,6	7,1	6,7	6,3
20	11,7	11,2	10,5	9,3	8,7	8,4	7,9	7,5	7,0

Für dieselben Intervalle und Abweichungen in der zweiten höhern Octave hat man nur die Hälfte dieser für die erste Octave geltenden Stegverrückungen zu nehmen, z. B. bei der nächsthöheren Quinte für eine Abweichung von 6 oder von $\frac{6}{1000}$ Octave nur $\frac{1}{10}$ des Stegmaassstabes u. s. w., in der 3ten Octave nur das Viertel, in der 4ten Octave das Achttheil u. s. w.

§. 73.

Nächst der genauen Eintheilung des Tonmessers sind insbesondere reine und gleichförmig dicke Saiten nöthig. Ein leichtes Mittel, die Güte der Saite zu prüfen, giebt der Tonmesser selbst an die Hand. Theilt man nämlich eine Saite *ai* Fig. 13 bei *b* genau zur Hälfte, so muss *ab* sowohl als *bi* die Octave des Tones der Saite *ai* angeben, oder die Töne von *ab* und *bi* müssen genau im Einklange stehen. Eben so muss *ac* oder $\frac{3}{5}$ Saite die grosse Sexte und der übrige Theil *ci* an $\frac{2}{5}$ die Octave der grossen Terz geben, oder die Töne von *ac* und *ci* müssen genau eine Quinte darstellen. Ferner muss geben: *ad* oder $\frac{2}{3}$ die Quinte, *di* oder $\frac{1}{3}$ die Octave dieser Quinte; *ae* oder $\frac{3}{4}$ die Quarte, *ei* oder $\frac{1}{4}$ die 2te Octave des Grundtons; *af* oder $\frac{4}{5}$ die gr. Terz, *fi* oder $\frac{1}{5}$ die 2te Octave dieser Terz; *ag* oder $\frac{5}{6}$ die kleine Terz, *gi* oder $\frac{1}{6}$ die 2te Octave der Quinte; *ah* oder $\frac{8}{9}$ die gr. Secunde und *hi* = $\frac{1}{9}$ die 3te Octave derselben. Diese Prüfungen sind ausreichend, aber auch unerlässlich nöthig; finden sich dabei Abweichungen, so ist die Saite für den Tonmesser nicht brauchbar. Auf ähnliche Weise lassen sich die Violin-Saiten prüfen.

Man sieht hieraus zugleich, dass man mittelst des blossen Gehöres Linien abtheilen könnte; wenn man nämlich eine gespannte Schnur oder Saite dergestalt hemmt, dass der kleinere Theil gerade die Octave des anderen Theiles angiebt, so ist der kleinere Theil $\frac{1}{3}$ vom Ganzen u. s. w. Eben so könnte man mit Hülfe des Satzes III. §. 23 die Verhältnisse der Durchmesser verschiedener Saiten bestimmen, mit Hülfe des I. Satzes §. 23 wägen u. s. w.

Um wenigstens die Richtigkeit des letztgedachten Satzes nachzuweisen, pflegt man wohl auch dem Monochord eine Einrichtung zu geben, bei welcher die Spannung der Saiten durch Gewichte bewirkt werden kann; es ist indess diese Beobachtung für den Musiker von keinem erheblichen Werth, auch kann der hier beschriebene Tonmesser leicht dazu gebraucht werden, wenn man am obern Seitentheile *B* einen Ring zum Aufhängen des Tonmessers anbringt, für den beabsichtigten Versuch die Wirbel entfernt und die Saiten mit angehängten Gewichten dergestalt spannt, dass sie sich behufs ihrer Abtheilung in gleiche Längen an den Steg *m'p'* bloss berührend, nicht reibend, anlegen.

Dass man in einzelnen Fällen auch die Sirene zu Darstellung der kleinen canonischen Intervalle benutzen kann, wird kaum der Bemerkung bedürfen; absolut genau wird man z. B. das grosse Comma $\frac{81}{80}$ erhalten, wenn man zwei concentrische Kreise respective in 80 und 81 gleiche Theile eintheilt.

III. Bildliche Scalen, Toncurve, Tonsäule.

§. 74.

Um die Pulsverhältnisse der Töne so wie das Verhältniss ihrer Höhen, unter welchem sie unserm Gehör erscheinen, für das Auge darzustellen, bietet sich in der logarithmischen Linie das vollständigste Hülfsmittel dar, indem die Abscissen dieser Curve die Logarithmen der zugehörigen Ordinaten darstellen. Sei nämlich *C'c'* Fig. 19 eine logarithmische Curve und *Cc* deren Abscisse: nimmt man nun auf letzter *CC'* = 59, *CD* = 111, *CD* = 170, *CD* = 229, *CE* = 263 etc. *Cc* = 1000 (s. Log. auf Taf. I.) und zieht dann aus den Puncten *C, C', D', D, D'* u. s. w. senkrechte Ordinaten bis zur Curve, so stellen erstere die verhältnissmässigen Höhen dieser Töne über dem Grundtone und letztere die ihnen zukommenden Pulsverhältnisse dar. Es verhalten sich nämlich die Ordinaten *CC'* zu *EE'* wie 1 zu $\frac{5}{4}$, *CC'* zu *FF'* wie 1 zu $\frac{4}{3}$, *CC'* zu *GG'* wie 1 zu $\frac{3}{2}$ u. s. w.; auf der Abscissenlinie aber ist *CE* = *FA* = *GH* die Grösse der grossen Terz; *CF* = *EA* = *Gc* die der Quarte; *CG* = *EH* = *Fc* die der Quinte; *CE* = *EG* = *Ac* die der kleinen Terz; *CD* = *FG* = *AH* die der grössern Secunde (des sogenannten grossen ganzen Tones); *DE* = *GA* die der grossen Secunde oder des sogenannten kleinen ganzen Tones; *EF* = *Hc* die der kleinen Secunde oder des grossen halben Tones; *E^bE* = *A^bA* u. s. w. die des kleinen halben Tones u. s. w.

§. 75.

Der Umstand, dass in der logarithmischen Linie die Abscissen, von irgendwelchem Puncte aus gerechnet, die Logarithmen der zugehörigen Ordinaten sind, bedingt umgekehrt den Satz, dass, wenn man auf der Abscissenlinie gleich grosse Theile, z. B. *BF* = *FC* u. s. w. nimmt, die zugehörigen Ordinaten dann eine geometrische Progression bilden, d. h. es muss dann sein: Ordinate *B* zu Ordinate *F* wie Ord. *F* zu Ord. *C* u. s. w. oder in Zeichen

$$\frac{\text{Ord. } B}{\text{Ord. } F} = \frac{\text{Ord. } F}{\text{Ord. } C} = \frac{\text{Ord. } C}{\text{Ord. } G} \text{ u. s. w.}$$

in *G* diejenige Ordinate bedeutet, welche in der Entfernung *FC* unterhalb des Punctes *C* liegt oder dem Contra *G*, der nächsttieferen Quarte des Tones *C* angehört. Im vorliegenden Falle verhält sich die grössere Ordinate zur

nächstfolgenden kleineren stets wie 4 zu 3 oder die kleinere ist stets $\frac{3}{4}$ von der grösseren. Denkt man sich also die Abscissenlinie in der Richtung von c über C ins Unendliche hinab verlängert und in lauter solche gleiche Theile wie $F C$ eingetheilt, so wird jede folgende Ordinate $\frac{3}{4}$ von der nächst vorhergegangenen, also stets etwas Wirkliches sein. Die Curve $c' C'$ wird also der Abscissenlinie immer näher und näher kommen aber nie mit ihr völlig zusammentreffen, weil die Ordinaten zwar immer kleiner, aber niemals = Null werden; in entgegengesetzter Richtung aber wird sie sich immer weiter von der Abscissenlinie entfernen. Der Kenntniss dieser Eigenschaft der logarithmischen Linie bedürfen wir zur Verständlichkeit des Folgenden.

§. 76.

Die logarithmische Linie oder Toncurve bestimmt ausser den Puls- und Höhen-Verhältnissen der Töne zugleich auch noch das Verhältniss der zugehörigen Saitenlängen. Sei nämlich CC' in Fig. 19 die Länge der Saite für den Ton C , so hat man nach §. 23 II. und nach vorigem §.

$$\frac{CC'}{\text{Saitenlänge von } G} = \frac{GG'}{CC'} = \frac{CC'}{X}$$

wo X diejenige senkrechte Ordinate der Curve bedeutet, welche in der Entfernung = CG unterhalb des Punctes C steht, oder der negativen Abscisse*) des betreffenden Tones zugehört, wenn der Punct C als der Nullpunct der Abscissen betrachtet wird. Zeichnet man also die Curve so gross, dass sie gerade zwei volle Octaven umfasst, und theilt man dann die zur untern Octave gehörige Abscisse gerade so wie die Abscisse Cc , nur in umgekehrter Ordnung, ein: so stellen die Ordinaten der untern Octave die verhältnissmässigen Saitenlängen zu den entsprechenden Tönen der obern Octave dar. Begreiflich lässt sich diess aber auch schon dadurch erreichen, dass man den untern Theil der Curve umgekehrt in die Lage $C' \bar{c}$ bringt, weil dann die Theilung der Abscisse Cc für diesen Nebenzweck mit benutzt werden kann. So stellt nun z. B.

$$\left. \begin{array}{l} CG \text{ die Höhe} \\ Gg \text{ die Saitenlänge} \\ GG' \text{ die Pulszahl} \end{array} \right\} \text{ des Tones } G, \quad \left. \begin{array}{l} CF \text{ die Höhe} \\ Ff \text{ die Saitenlänge} \\ FF' \text{ die Pulszahl} \end{array} \right\} \text{ des Tones } F$$

dar, wobei die Länge CC' als Einheit für die Pulszahlen und Saitenlängen, die Länge Cc aber als Einheit für die Höhen der Töne oder für die Grösse der Intervalle zu betrachten ist.

§. 77.

Setzt man die Saitenlängen und Spannungen für alle Töne gleich gross, dann geben die Ordinaten der umgekehrten Curve die Verhältnisse der Durchmesser der Saiten für jeden Ton an; hier gilt nämlich nach §. 23, III wieder das ähnliche Gesetz, dass sich die Pulsmengen umgekehrt wie die Durchmesser der Saiten verhalten.

§. 78.

Wenn man von einer logarithmischen Linie zwei senkrechte, im Verhältniss 1:2 stehende Ordinaten z. B. CC' und cc' auf Fig. 19 nimmt, und ihren Unterschied $C''c'$ in vier gleiche Theile theilt, so bestimmen die aus den Theilpuncten C'', E'', G'', K'' bis zur Curve und von da bis zur Abscisse geführten rechtwinklichen Coordinaten die Töne C, E, G, K oder den Stammaccord für alle möglichen einfachsten Intervalle (§. 63), welche letztere dann mit Hülfe der symmetrischen Octav-, Quint- und Quart-Mittelpuncte auf der Abscisse construirt werden können. In Fig. 21 ist diese Construction der einfachsten Intervalle ausgeführt, und zwar der bessern Uebersicht wegen auf einer in einen Kreis zusammengelegten Abscisse. C, E, G, K sind die Normalpuncte, woraus sich ferner zunächst bei M die Mitte der Octave; bei m und m'' die Mittelpuncte der beiden Quinten CG und Fc ; bei m''' und m' die Mittelpuncte der beiden Quartan CF und Gc ergeben. Die Chorden $GF, A^b E, A E^b$ etc. zeigen die correspondirenden, einander zur Octave ergänzenden Intervalle und zugleich die in Bezug auf M Statt findende allgemeine Symmetrie an. Die symmetrische Lage der Töne gegen die Quart- und Quint-Mittelpuncte wird durch die aus letztern beschriebenen Kreisbogen versinnlicht, welche zugleich den Gang der Construction darstellen. Zieht man die Chorden $mm'', m'''m'$, so hat man gleichsam die natürlichen Grenzl意思 für die Rangordnung der einfachsten Intervalle in Bezug auf Wohlgefälligkeit; der Abschnitt $m M m''$ enthält die Consonanzen, sein Gegensatz $m''' C m'$ die Dissonanzen und zwischen diesen beiden Abschnitten liegen die Uebergangs- oder Grenz-Intervalle zwischen Consonanz und Dissonanz, nämlich die kleinern an Annehmlichkeit immer mehr abnehmenden Terzen $\frac{6}{5}$, $\frac{3}{2}$ und $\frac{7}{6}$ mit ihren Octavcomplementen den grössern Sexten $\frac{5}{3}$, $\frac{2}{1}$ und $\frac{1}{2}$. Die schwarzen Puncte auf der kreisförmigen Abscisse zeigen die Lage der Töne unsers gleichschwebend temperirten 12stufigen Systems (§. 93).

*) Die Gleichung unsrer Curve ist $x = \log. y$; sei nun y' die Saitenlänge für den Ton, welchem jenes y als Pulszahl angehört, so ist $y' = \frac{1}{y}$ und $\log. y' = -\log. y = -x$; die Saitenlänge y' ist also der zur negativen Abscisse x gehörigen Ordinate gleich.

Diese Construction und das, was §. 61 über die Symmetrie in der Lage der Töne gesagt wurde, werden sich jetzt wechselseitig zur Erläuterung und Erklärung dienen.

§. 79.

Windet man die logarithmische Linie Fig. 19 um einen geraden Cylinder, dessen Peripherie der Länge der Abscisse Cc gleich ist, dergestalt, dass die Ordinaten auf die Grundfläche des Cylinders senkrecht zu stehen kommen, so wird die Curve $C'c'$ spiralförmig am Cylinder hinauf laufen. Verlängert man dann alle einzelnen Ordinaten und bestimmt auf ihnen die Punkte, wohin ihr Doppeltes, 4faches, 8faches u. s. w. fällt, so erhält man die Punkte der Spirale für die 2te, 3te, 4te u. s. w. höhere Octave. Dasselbe kann man unterwärts mittelst der Hälfte, dem $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ u. s. w. der Ordinaten, für die tieferen Octaven erlangen und sich solches nach beiden Richtungen ins Unendliche fortgesetzt denken. Jeder Octave gehört dann ein voller Umlauf um den Cylinder zu; der Punkt, wo sie wieder in die Verlängerung der Anfangsordinate eintritt, schliesst die durchlaufene Octave und ist zugleich der Anfangspunct der nächstfolgenden. Es ist übrigens gleichgültig, durch welchen Punkt der Curve man sich die Anfangsordinate gezogen denkt (§. 78). Alle die Punkte der Spirale, welche in einer und der nämlichen verlängerten Ordinate liegen, gehören auch einerlei Tönen, nur in verschiedenen Regionen, an. Da nun alle Ordinaten (Erzeugungslinien des Cylinders), welche innerhalb irgend welcher Octave um den Cylinder herum gedenkbar sind, nothwendig auch durch alle übrigen Octaven verlängert gedacht werden können, so folgt, dass in keiner Octave ein Ton liegen kann, der nicht auch in allen übrigen Octaven wieder vorkäme. Die Abtheilung der Abscisse Cc muss daher auch für alle andern gedenkbaren Octaven gelten; sie misst die Abstände der Töne von einander, in welcher Octave auch immer diese Töne liegen mögen. Denkt man sich durch den Anfangs- und Endpunct jeder Octave horizontale Kreise (senkrecht auf die Ordinaten) um den Cylinder herum gezogen, so theilen diese Kreise (Octavringe) auf der Oberfläche oder auf dem sogenannten Mantel des Cylinders die einer jeden Octave zugehörigen Mantelflächen ab; sie verhalten sich, der Grösse nach, von irgend welcher Octave aus gerechnet, aufwärts wie 1, 2, 4, 8 etc., abwärts wie 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ etc. und versinnlichen das progressive Wachsen und Abnehmen der Schwingungsmengen. Eine solche Säule, Tonsäule Fig. 22, giebt dann ein eben so interessantes als vielumfassendes Bild der einfachen Gesetze des Tongebiets.

1) Jeder senkrechte Säulenschnitt giebt in jeder Octave stets zwei solche Töne, deren Abstände, vom Anfangspuncte der Octave aus gerechnet, zusammengenommen gerade den Raum oder das Intervall der Octave ausfüllen, oder jedes solche Intervall ist das Octavcomplement oder die Umkehrung des andern.

2) Da, wo die Spirale gerade den halben Weg um die Säule vollendet hat, liegt der harmonielose Mittelpunkt der Octave. Alle die Punkte der Spirale, welche in der auf M' stehenden Ordinate liegen, sind solche bedeutungslose Mittelpunkte.

3) Das Consoniren der Töne hängt von der Einfachheit des Verhältnisses ab, was zwischen den Höhen dieser Töne über dem Grundkreise oder über der Linie $C'M'$ Statt findet.

4) Wie in Fig. 21 und §. 78 liegen hier im Säulenabschnitte $m''M$ die Consonanzen, im Abschnitte $m'C'$ die Dissonanzen und zwischen m'' und m' die Uebergangs-Intervalle von der Consonanz zur Dissonanz.

5) Der im Fusse der Säule besonders gezeichnete Grundkreis oder die in einen Ring zusammengelegte Abscisse Cc aus Fig. 19, welchen man sich auf $C'm'm''M'$ liegend als eingetheilte Peripherie der Grundfläche des Cylinders vorzustellen hat, behält seine maassbestimmende Natur, wie man ihn auch um die verticale Axe des Cylinders gedreht sich vorstellen möge. Die durch C' gehende Ordinate bestimmt stets den Anfangs- und Endpunct der Octave, die auf M' stehende stets den Mittelpunkt derselben, die auf E stehende stets die grosse Terz u. s. w., woraus wieder der Satz folgt, dass kein Ton eine andere natürliche Leiter bis zu seiner Octave haben kann, als ein anderer Ton.

6) So wie die Spirale über die Grenzen der Töne und des Zählbaren hinab steigt, und in engeren Windungen dem Grundkreise sich immer mehr und mehr nähert, ohne ihn doch jemals erreichen zu können (§. 75); so eilt sie auch jenseits und zwar immer schnelleren und steileren Fluges über das Gebiet des Gehörs in das Unendliche hinauf, und drängt uns gleichsam zu der weitem Vermuthung, dass die Erscheinungen, welche den nicht mehr hörbaren schnellen Pulsen angehören, nach demselben Gesetze des Rhythmus unter einer neuen Gestalt von feineren Sinnen empfunden werden dürften. Wenigstens sind wir ohne Weiteres nicht zu dem Schlusse berechtigt, dass der Rhythmus an den Grenzen der Klänge seine Herrschaft plötzlich endige.

Fünftes Capitel.

Von den musikalischen Temperaturen.

I. Ueber die Nothwendigkeit derselben.

§. 80.

Nach Vorigem kann kein Ton eine andere natürliche Leiter bis zu seiner Octave haben als ein anderer Ton und wir müssen daher auch in der Instrumentalmusik und besonders wegen der Instrumente, wo wir während des Spielens die Höhe der Töne nicht beliebig verändern können, dahin trachten, dass jeder Ton des practischen Systems in den übrigen Tönen desselben jene natürlichen Intervalle finde, um jeden Ton als Grundton benutzen zu können. Wir wollen zunächst zeigen, wie aus dieser schon im blossen Gefühl liegenden Forderung unser jetziges practisches Tonsystem mit 13 festen Tönen in der vollen Octave hervorging, weil es zugleich einen vorläufigen Begriff von der Nothwendigkeit der Temperatur der Töne geben kann.

Bis in das 16te Jahrhundert bediente man sich auf den Instrumenten bloss folgender, schon bei den alten Griechen vorkommenden Tonleiter

Töne	C	D	E	F	G	A	(B)*	H	c
Pulszahlen	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{16}{9}$	$\frac{243}{128}$	2
Stufen-Exponenten		$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{256}{243}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{256}{243}$	
Log. der Töne	0	170	340	415	585	755		925	1000
Log. der Stufen	170	170	75	170	170		170	75	

Diese Tonleiter hatte gar keine reinen Terzen, die man auch wohl damals füglich entbehren konnte, weil es mehr auf blosser Melodie als auf Harmonie abgesehen war. Diesem Mangel einigermaassen abzuheffen, kam zu Ende des 16ten Jahrhunderts folgende Scala in Gebrauch

C	D	E	F	G	A	B	H	c
1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{16}{9}$	$\frac{15}{8}$	2

welche mit unsrer heutigen diatonischen Tonleiter (§. 42) identisch ist und nur den Ton B mehr hat, welcher, wie bereits erwähnt, als reine Quarte dem F beigegeben wurde. Auch diese Tonleiter war indess noch sehr unvollkommen, weil C und F bloss grosse, D, E, A und H aber nur kleine Terzen hatten, aus jenen Tönen also nur in Dur, aus diesen nur in Moll gespielt werden konnte. Nur G hatte in B und H beide Terzen. Besonders war bei dem Transponiren oder beim Versetzen eines Tonstücks aus einer Tonart in eine andere der Mangel des Unterhalben Tones (Semitonium, Subsemitonium modi), d. i. desjenigen halben Tones, welcher zunächst unter der Tonica einer Tonart liegt, z. B. F $\sharp$ in G-Dur, C $\sharp$ in D-Dur u. s. w. sehr fühlbar, da der beruhigende Schluss von H auf c, in der Tonart G durch den Uebergang von F in G nicht wiedergegeben werden konnte. Diess veranlasste die Theilung der in dieser Tonleiter noch vorhandenen 4 ganzen Töne in halbe Töne oder die Hinzufügung von 4 neuen Tönen zwischen CD, DE, FG und GA, wodurch unser C $\sharp$, D $\sharp$, F $\sharp$ und G $\sharp$ entstanden. Die Scala hatte nun 13 Töne, schritt durch lauter sogenannte halbe Töne fort und wurde deshalb die halbtönige oder auch chromatische Tonleiter genannt (§. 47). Nothwendigerweise musste man aber dabei zugleich auf neue Unvollkommenheiten stossen; man musste finden, dass G $\sharp$ als reine grosse Terz von E in der Höhe 644 nicht auch zugleich die kleine Terz von F oder den Ton A $\flat$ in der Höhe 678 vorstellen konnte, weil dieser um das Intervall 34 höher liegen musste; so wie dass D $\sharp$ in der Höhe 229 ebenfalls nicht zugleich als kleine Terz zu C gebraucht werden konnte, weil diese um 263 von C abstehen musste. Schon diess musste also gleich anfangs auf die Nothwendigkeit einer kleinen Abweichung von der reinen Höhe der eingeführten neuen Töne hinweisen, wenn man die Absicht erreichen wollte, aus jedem der ältern diatonischen Töne in Dur und Moll spielen zu können. Es musste ferner hieraus der Wunsch entspringen, diese vier neuen Töne selbst wieder als Grundtöne gebrauchen zu können, was auf die Forderung führt, jedem jener 13 Töne seine grosse und kleine Terz, reine Quinte u. s. w. zu verschaffen. Diess war aber unerreichbar, wenn man nicht noch mehr neue Töne einführen, sondern bei der Anzahl von 12 Stufen in der Octave stehen bleiben wollte. Es konnten z. B. wie doch verlangt wurde, die Töne C, E, G $\sharp$, c nicht in der Weite reiner grosser Terzen von einander abstehen, denn die Höhe einer grossen Terz über dem Grundtone

*) Dieser Ton wurde als reine Quarte zu F erst später eingeführt; über die wahrscheinliche Entstehung dieser Tonleiter kann man die ältere Ausgabe von *Gehler's phys. Wörterbuch*, Art. „Ton“, oder *Sulzer's Theorie der schönen Künste*, Art. „System“, nachlesen.

beträgt 322, drei grosse Terzen geben also bloss 966 Höhe, während doch die letzte dieser Terzen oder der Ton c, welcher als Octave von C in seiner vollen Reinheit beibehalten werden muss, um die Weite 1000 von C absteht. Sollte also dennoch die Octave Cc, um jenem Wunsche zu genügen, in 3 gleich grosse Terzen zerlegt werden, so müsste einer jeden derselben $\frac{1000}{3}$ oder $333\frac{1}{3}$ Abstand von ihrem Grundtone gegeben, folglich die grosse Terz um $333\frac{1}{3} - 322$ oder um $11\frac{1}{3}$ höher genommen werden, als sie der Theorie und dem Gefühl nach sein sollte. Eben so mussten bei dieser Forderung 12 aufeinanderfolgende Quinten mit dem letzten Tone auf das Ende der 7ten Octave fallen; da indess die 12te Quinte um 12 mal 585 oder um 7020 vom ersten Grundtone absteht, die 7te Octave aber nur um 7000, so musste auch jede Quinte verändert und zwar verkleinert, nämlich bloss zu $\frac{7000}{12} = 583\frac{1}{3}$ Höhe genommen werden.

Jene Forderung, innerhalb der Octave nicht mehr als 12 Stufen zu gebrauchen und dennoch aus jedem Tone in Dur und Moll spielen zu können, erheischte also nothwendig eine Stimmung jener 13 Töne, bei welcher den Intervallen mehr oder weniger von ihrem reinen Werthe entnommen werden musste, und diess ist es, was man Temperatur oder Schwebung des Tonsystems nennt.

II. Nähere Prüfung der enharmonischen Tonleiter.

§. 81.

Man begegnet zuweilen der Meinung, dass die Temperatur der practischen Scala nur deshalb nöthig sei, weil wir die in der enharmonischen Scala vorkommenden $\sharp$ und $\flat$ Töne auf Instrumenten mit fester Stimmung nicht einzeln für sich, sondern je zwei nebeneinanderliegende dergleichen Töne nur mittelst einer Saite oder eines Tones darstellen könnten, dass dagegen der Violinspieler z. B. die $\sharp$ und $\flat$ Töne nur in der Höhe anzugeben brauche, wie sie in der enharmonischen Scala festgesetzt seien, um stets rein zu spielen. Zu Beseitigung dieses Irrthums wird eine nähere Prüfung dieser Scala hier nicht am unrechten Orte sein.

Eine reine Dur- und Moll-Tonleiter muss nach §. 52 und §. 62 in folgenden Intervallen fortschreiten:

2	3 $\flat$	3	4	5	6 $\flat$	6	7 $\flat$	7
170	263	322	415	585	678	737	848	907

Addirt man zu jedem dieser Werthe den Logarithmen irgend eines Tones der enharmonischen Scala, so erhält man die Höhenzahlen für die Töne, welche zur genauen Darstellung der Dur- und Moll-Tonleiter jenes Tones nöthig sind, und man braucht dann nur in der I. Tafel nachzusehen, ob in der enharmonischen Scala Töne vorkommen, welche diese Höhen haben. So würde man z. B.

für die	2	3 $\flat$	3	4	5	6 $\flat$	6	7 $\flat$	7	des Tones D
die Höhen	340	433	492	585	755	848	907	1018	1077	finden;

in der enharmonischen Scala finden sich aber bei den Tönen

	E	F	F $\sharp$	G	A	B	H	c	c $\sharp$
die Höhen	322	415	474	585	737	848	907	1000	1059*)

Für den Ton D würde also die 2, 3 $\flat$, 3, 5, 7 $\flat$ und 7 um $\frac{18}{1000}$ Octave oder um ein grosses Comma zu niedrig sein. Noch leichter lässt sich diese Untersuchung mechanisch führen. Man zeichne sich (wie §. 74) einen Maassstab P Fig. 14 für die enharmonische Scala und zwar für zwei volle Octaven; auf einem andern Maassstabe Q deute man eben so die Intervalle der Dur- und Moll-Tonleiter an. Legt man nun letztern an erstern dergestalt an, dass der Anfangspunct oder die Prime auf dem Maassstabe Q genau auf den, dem Tone D zugehörigen Theilstrich von P fällt, so wird man das oben durch Rechnung Gefundene sofort mit dem blossen Auge erkennen, nämlich finden, dass die Töne E, F, F $\sharp$, A, c und c $\sharp$ zu niedrig liegen, um für D die reine 2, 3 $\flat$, 3, 5, 7 $\flat$ und 7 abgeben zu können. Auf gleiche Weise kann man dann sowohl rechnend als mechanisch für jeden andern Ton verfahren. Die auf solchem Wege zu erlangenden Ergebnisse habe ich der Vollständigkeit halber auf der II. Tafel zusammengestellt; sie giebt eine genaue Vorstellung von sämtlichen Dur- und Moll-Tonleitern, wie sie bei unverändertem enharmonischen Systeme für jeden Ton desselben vorhanden sein würden. Die vorkommenden Abweichungen von der Reinheit sind bei den betreffenden Tönen in Logarithmen oder Tausendtheilen der Octave angegeben; das Zeichen — bedeutet „unter sich schwebend oder zu tief“ das Zeichen + aber „über sich schwebend oder zu hoch.“

Wir werden später finden, dass eine Abweichung von $\frac{25}{1000}$ Octave bei den Consonanzen gar nicht zulässig ist; es würden daher die Dur-Dreiklänge (§. 97) von D $\sharp$, E $\sharp$ und H $\sharp$ so wie die Moll-Dreiklänge von F $\flat$, c $\flat$ und H $\flat$ nicht brauchbar sein; eben so wenig würden die Dur-Dreiklänge von D $\flat$, D, B und H so wie die Moll-Drei-

*) Um die Höhenzahlen für die Töne der nächsthöhrn Octave zu erhalten, braucht man nämlich nur die Zahl 1000 zu den in der 1sten Tafel vorkommenden Logarithmen der Töne zu addiren.

klänge von D^b , D, $D^\sharp$, B und H statthaft sein, weil eine um ein ganzes Comma von 18 zu tiefe Quinte höchst störend ist.

Wenn statt der in dieser Tafel mit einem Sternchen bezeichneten Töne in unserer Notenschrift andere Töne, z. B. $F^\times$ oder ein um den doppelten kleinen halben Ton erhöhtes F statt G^b ; ein $c^\times$ statt d^b u. s. w. angegeben werden, so bedarf es hier der Bemerkung, dass diese Bezeichnung oder Schreibart auf das enharmonische System nicht bezogen werden kann und darf, indem diess einerseits Töne erfordern würde, welche darin gar nicht vorkommen, andererseits aber auch wieder auf neue Unvollkommenheiten führen würde. So würde z. B. dem Tone $F^\times$ oder Fisis eine Höhe von $474 + 59 = 533$ zukommen, dieser Ton also immer noch nicht die reine grosse Terz zu $D^\sharp$ geben, weil diese Terz die Höhe $229 + 322 = 551$ haben muss. Dieses auf die blosse Gleichartigkeit der Bezeichnung berechnete Hülfsmittel hat nur dann einen verständlichen Sinn, wenn es sich auf ein gleichschwebend temperirtes System bezieht (s. §. 132, 14 und §. 95).

§. 82.

Dass jene Verschiedenheiten der Intervalle nur das zufällige Ergebniss der unvollständigen enharmonischen Tonleiter sind, wollen wir in Kürze noch etwas weiter erörtern, weil es zu genauerer Beurtheilung dieser und ähnlicher Scalen beitragen kann. Dass $DF^\sharp$ sich als eine Terz zeigt, welche um 18 kleiner ist, als die wahre grosse Terz CE, rührt bloss daher, dass man ohne Ausnahme an jeden Ton der diatonischen Tonleiter das Intervall 59 anfügte (§. 47). Dieses $F^\sharp$ ist also nichts weiter als eine um 59 erhöhte Quarte von C. Hätte man z. B. dem Tone G seinen Unterhalben-Ton gegeben, oder einen Ton von $585 - 93 = 492$ Höhe eingeführt, so würde auch D seine reine grosse Terz, H seine reine Unterquarte und $D^\sharp$ seine reine kleine Terz gehabt haben. Oder denkt man sich statt des D von $\frac{9}{8}$ oder 170 ein D' von $\frac{10}{9}$ oder 152 (§. 62), so würde das F von 415 die reine kleine Terz, das $F^\sharp$ von 474 die reine grosse Terz, das A von 737 die reine Quinte für dieses D' abgegeben haben. Dieses D' aber würde dann mit G an 585 keine reine Quarte, und jenes $F^\sharp$ von 492 Höhe würde mit $c^\sharp$ keine reine Quinte geben. Diese Untersuchungen kann der Leser mittelst des §. 106 beschriebenen Accordmessers sehr leicht weiter fortsetzen; er wird stets finden, dass, wenn auch ein Ton für einige Verbindungen reine Intervalle gewährt, er doch wieder zu andern Tönen nicht passt. Die Anfügung des kleinen halben Tones an alle Töne der diatonischen Tonleiter würde nur dann ihren Zweck erreicht haben, wenn alle Töne derselben gleichweit von einander entfernt gewesen wären. Da diess aber der Natur der Harmonie zufolge nicht der Fall ist, so kann auch unsre enharmonische Tonleiter weder als eine practische Scala noch als eine vollständige Grundlage für die Harmonie-Lehre angesehen werden.

§. 83.

Aehnliche Unvollkommenheiten würde man bei jeder andern Einrichtung der enharmonischen Scala finden, wenn man darin die Hauptintervalle oder die Töne der Dur- und Moll-Tonleiter völlig rein beibehalten wollte. Man sieht nämlich, dass der Forderung, allen einzelnen Tönen einer Scala aus den Bestandtheilen derselben selbst einerlei Intervalle zu verschaffen, einzig nur dadurch Genüge geschehen könnte, wenn alle Stufen der Scala einander genau gleich wären, weil nur in diesem Falle ein stetes Zusammentreffen aller Theilstriche der Maassstäbe P und Q Fig. 14 Statt finden könnte. Eine solche Gleichstufigkeit ist aber mit voller Reinheit der Intervalle unvereinbar.

III. Ueber die verschiedenen Arten der Temperaturen.

§. 84.

Der Umstand, dass sich bei der Vergleichung der verschiedenen Töne der theoretischen Scalen noch mannichfaltige andere Intervalle, z. B. kleinere Terzen wie DF von $\frac{32}{27}$, Sexten wie Fd von $\frac{27}{16}$ ergaben (§. 61), woraus dann wieder als Quintcomplement jener kleineren Terz eine neue grössere Terz von $\frac{81}{64}$ folgte u. s. w., veranlasste in früherer Zeit die Meinung, dass manche Töne eine besondere Tonleiter erhalten müssten, um diesen natürlichen Verbindungen zu genügen. Man erfand daher die sogenannten ungleichschwebenden Temperaturen, bei welchen man die nothwendigen Verrückungen von der Reinheit ungleichmässig vertheilte, nämlich einigen Tönen ganz reine Terzen, andern etwas schärfere, noch andern etwas weichere u. s. w. Terzen gab. Zu dieser Gattung gehören

1) die sogenannte *Kirnberger'sche* Temperatur

C	$C^\sharp$	D	$D^\sharp$	E	F	$F^\sharp$	G	$G^\sharp$	A	B	H	c
1	$\frac{256}{243}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{32}{27}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{45}{32}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{128}{81}$	$\frac{270}{161}$	$\frac{16}{9}$	$\frac{15}{8}$	2
0	75	170	245	322	415	492	585	660	746	830	907	1000

II) die beiden *Malcolm'schen* Scalen*)

	C	C $\sharp$	D	D $\sharp$	E	F	F $\sharp$	G	G $\sharp$	A	B	H	c
1)	0	93	170	263	322	415	492	585	678	737	830	907	1000
2)	0	87,5	170	248	322	415	502,5	585	663	737	824,5	907	1000

Eine vierte Temperatur, von welcher *Rousseau* im Art. *Température* spricht und welche seiner Angabe nach in Frankreich für die besste gehalten worden sein soll, wird von ihm nicht deutlich genug bezeichnet, um sie in unsern Logarithmen darstellen zu können. Andere Musiker entschieden sich dagegen für die gleichschwebende Temperatur (bei welcher sämtliche grossen Terzen und Quinten die früher erörterten Werthe von respective $333\frac{1}{3}$ und $583\frac{1}{3}$ erhalten), weil sie die Quarten und Quinten beinahe völlig rein, die Terzen aber in einer noch erträglichen Abweichung giebt und übrigens naturgemäss jedem Tone die nämliche diatonisch-chromatische Scala verleiht, wie sie der Ton C dabei erhält.

Wir werden auf diese verschiedenen Temperaturen §. 91 fg. zurück kommen, und finden, dass man der gleichschwebenden Temperatur mit vielem Rechte den Vorzug einräumt. Da indess bei selbiger ebenfalls noch manche grosse Abweichungen, namentlich scharfe grosse Sexten vorkommen, so wollen wir jetzt erst noch eine leichte Untersuchung darüber anstellen, ob wirklich keine gleichschwebende Temperatur möglich sei, welche uns für jeden Ton des practischen Systems die reinen Intervalle geben könne. Wir werden dabei das Eigenthümliche der Forderung, die dabei zu erfüllenden Bedingungen und die Hindernisse näher kennen lernen und dadurch zugleich eine klärere Idee von dem Gegenstande selbst erlangen; dann wollen wir noch die Zulässigkeit der Abweichungen von der Reinheit untersuchen, um den Werth der verschiedenen Temperaturen desto sicherer beurtheilen zu können.

IV. Theoretische Untersuchung der möglichen gleichschwebenden Temperaturen.

§. 85.

Zu einer gleichschwebenden practisch anwendbaren Temperatur wird nach Vorigem erfordert die Eintheilung der Octave in eine mässige Anzahl gleichgrosser Stufen von solcher Beschaffenheit, dass diese Stufen zugleich die wichtigsten und unentbehrlichsten Intervalle in möglichster Reinheit mit darstellen. Es ist leicht einzusehen, welche Bedingung bei solcher Eintheilung wegen Aufrechterhaltung der Harmonie in Rechnung genommen werden muss. Eine gleichstufige Tonleiter hat nämlich die Eigenschaft, dass alle Intervalle, welche für irgendeinen Ton der Scala vorhanden sind, auch für alle übrigen Töne derselben darin vorkommen.. (ψ); und es bedarf daher nur der Untersuchung, unter welcher Bedingung z. B. der Ton C alle zur Harmonie unerlässlich gehörigen Intervalle, also mindestens seine vollständige Dur- und Moll-Tonleiter erhalte. Hierzu wird uns der §. 63 gefundene Satz dienen, dass der Dreiklang C E G die Basis unsrer gesamten Harmonie bildet. Nehmen wir nämlich jetzt an, dass eine Tonleiter mit einer mässigen Anzahl gleichgrosser Stufen möglich sei, welche zugleich den Stammaccord der Consonanz C E G c mit hinreichender Genauigkeit darstelle, so erhellet, dass dann auch die wichtigsten übrigen Intervalle in der Leiter mit vorkommen müssen. Es werden nämlich dann in Folge der Voraussetzung vorhanden sein: C E G c e. Da nun E in den Tönen G und c seine kleine Terz und kleine Sexte, und G in den Tönen c und e seine Quarte und grosse Sexte hat, so müssen in der Leiter nothwendig auch Töne vorkommen, welche ebendieselben Intervalle, nämlich die 3^b , 4 , 6^b und 6 für den Ton C darstellen (s. oben b. ψ). Aus gleichem Grunde wird G seine 3^b , 3 und 5 haben und daraus für den Ton C die 7^b , 7 und grosse Secunde hervorgehen. Alle diese Intervalle würde dann auch jeder andere Ton in der Leiter erhalten, und man sieht, dass dadurch für C und folglich auch für alle übrigen Töne der Leiter immer mehr und mehr neue und auch zugleich desto reinere Intervalle entspringen würden, je mehr Stufen man anwenden müsste und könnte, um in ihnen die Töne jenes Stammaccords mit zu erhalten, und je genauer man sich dabei der wahren Höhe dieser Stammtöne näherte.

Die Bedingung, in einer gleichstufigen Tonleiter jene zur Harmonie unerlässlich erforderlichen Intervalle möglichst genau zu erlangen, reducirt sich also auf die einfache Forderung: dass in der gleichstufigen Leiter die grosse Terz und Quinte in möglichster Reinheit mit vorkomme, denn hierin ist, wie so eben gezeigt wurde, jene Forderung zu Miterlangung der übrigen wichtigsten Intervalle implicite enthalten. Durch diese Bedingung, welcher nothwendig Genüge geschehen muss, werden der Willkühr sehr enge Grenzen gesetzt. Tonica, gr. Terz, Quinte und Octave sind nämlich gleichsam gegebene oder vorherbestimmte Sprossen einer Leiter, welche letztere mit möglichst genauer Beibehaltung der Lage jener Sprossen in eine nicht allzu grosse Anzahl gleichweiter Stufen eingetheilt werden soll und muss.

*) Nach *Rousseau* Dict. de mus. art. Echelle in unsere Logarithmen übersetzt. *Rousseau* glaubte die erste dieser Scalen naturgemäss zu verbessern, indem er vorschlug, die grossen Töne in die zwei Stufen $\frac{25}{24}$ und $\frac{27}{22}$ oder in 59 und 111 zu zerlegen; die Töne C $\sharp$ F $\sharp$ B würden dann die Höhe 59, 474, 796 erhalten müssen.

Welche Mengen von Stufen dieser Bedingung entsprechen, können wir nun mit Hülfe unserer Logarithmen sehr leicht finden. Wir haben nämlich für die möglichst rein darzustellenden Töne des Stammaccords

	C	E	G	c
die Höhen	0	322	585	1000
folglich	(322)	(263)	(415)	für die Zwischenräume,

und man braucht also jetzt nur noch diejenigen ganzen Zahlen aufzusuchen, welche sich beinahe eben so verhalten, wie die Grössen dieser Zwischenräume. Unter andern finden sich die Zahlen 16, 13, 21, was überhaupt eine Anzahl von 50 gleichen Stufen für die Octave geben würde; die Weite einer jeden solchen Stufe würde dann sein $\frac{1000}{50} = 20$, und man würde haben für die grosse Terz 16 mal $20 = 320$ und für die Quinte $(16 + 13) \times 20 = 580$. Mit der 16ten Stufe würde man also der reinen grossen Terz bis auf $\frac{2}{1000}$ Octave und mit der 29sten Stufe der reinen Quinte bis auf $\frac{5}{1000}$ Octave nahe kommen; um so viel würden nämlich diese Stamm-Intervalle bei der 50-stufigen gleichmässigen Eintheilung tiefer erscheinen als die reinen Intervalle. Noch kleinere Verhältnisszahlen sind (14, 11, 18) (11, 9, 14) (10, 8, 13) (7, 6, 9) (6, 5, 8) (4, 3, 5), bei welchen die volle Stufenzahl respective 43, 34, 31, 22, 19, 12 sein würde.

§. 86.

Der Uebersicht wegen sind für diese sieben Eintheilungsarten die Stufenweiten, die daraus entspringenden Werthe für die obigen beiden Stamm- oder Probe-Intervalle, ingleichen deren Abweichungen vom reinen Werthe in Folgendem zusammengestellt worden. Der Werth der Octave bleibt bei allen diesen Temperaturen ungeändert, weil, wenn n die Anzahl der Stufen bedeutet, die Octave allemal den Werth $\frac{1000}{n} \times n = 1000$ erhalten muss.

Anzahl der Stufen.	Stufenweite.	Werth von E	Abweichung	Werth von G	Abweichung
50	20,	320	— 2	580	— 5
43*)	23 _{,256}	325 _{,6}	+ 3 _{,6}	581 _{,4}	— 3 _{,6}
34	29 _{,411}	323 _{,5}	+ 1 _{,5}	588 _{,2}	+ 3 _{,2}
31	32 _{,258}	322 _{,6}	+ 0 _{,6}	580 _{,7}	— 4 _{,3}
22	45 _{,454}	318	— 4	591	+ 6
19	52 _{,632}	316	— 6	579	— 6
12	83 _{1/3}	333 _{1/3}	+ 11 _{1/3}	583 _{1/3}	— 1 _{2/3}

Die grösste Abweichung von der Reinheit findet sich hiernach bei der 12stufigen Temperatur mit $+ 11\frac{1}{3}$ bei der grossen Terz, was mit der auf der entgegengesetzten Seite liegenden Abweichung der Quinte an $- 1\frac{2}{3}$ zusammen $\frac{13}{1000}$ Octave als Abweichung für die kleine Terz und für deren Octavcomplement die grosse Sexte giebt. Bei der 19stufigen Temperatur ist die grösste Abweichung $= - 12$ bei der grossen Septime als der Summe von Quinte und grosser Terz. Am nächsten kommt der Reinheit unter den kleineren Stufenzahlen die 31stufige Temperatur; da indess diese, so wie auch schon die 22stufige Temperatur wegen der Menge der Stufen nicht mehr practisch ausführbar sein möchten, im Uebrigen aber es ausser den beiden Zahlen 19 und 12 keine kleinere ganze Zahl weiter giebt, welche nach jenen Bedingungsverhältnissen in drei andere ganze Zahlen sich so nahe genau als nöthig zerfallen liesse, so erhellet, dass für ein gleichschwebendes practisch ausführbares Tonsystem einzig nur diese beiden letzten Temperaturen von 19 oder 12 gleichen Stufen zulässig sind.

§. 87.

Wollte man den Ton K und die übrigen von ihm abhängigen 7theiligen Ton-Verhältnisse im practischen Systeme mit aufnehmen, so wäre nach §. 85 die Bedingung der Eintheilung dann diese, dass auf der gleichstufigen Leiter die Töne C, E, G, K, c, oder Sprossen in den Höhen 0, 322, 585, 807, 1000 mit vorkommen. Die kleinste hierzu nöthige Stufen-Menge würde 31 sein, übrigens aber jene Stammtöne in den Höhen 0, 322_{,6}, 580_{,7}, 806_{,5}, 1000, folglich in so geringen Abweichungen von der Reinheit darstellen, dass die 31stufige Leiter das vollkommenste practische System gewähren würde, wenn sie nicht wegen der grossen Menge der Stufen für unanwendbar erklärt werden müsste.

Hieraus erhellet nun, dass wir uns des Tones k und noch weit mehr der Töne l und m (§. 48) oder mit andern Worten der 7-, 11-, 13-theiligen Tonverhältnisse in unsern practischen Systemen gänzlich begeben und uns

*) Diess ist die *Sauveur'sche* Eintheilung, nach welcher die Octave in 43 mères = 301 heptamères = 3010 decamères auf eine unnöthig weitläufige Weise zerlegt wurde. Mém. de l'Acad. de Paris. 1701 p. 297.

lediglich mit den aus den Zahlen 2, 3 und 5 entspringenden Tonverhältnissen oder mit der §. 62 entwickelten Dur- und Moll-Tonleiter begnügen müssen.

§. 88.

Aus dem Bisherigen erkennt man nun auch zugleich den Grund für die absolute Nothwendigkeit der Temperatur practisch anwendbarer Tonsysteme; sie beruht nämlich auf dem einfachen Umstande, dass die Höhen der Töne in dem Stammaccorde C E G c oder die Stamm-Intervalle 3^b , 3 und 4^{te} , kein so grosses gemeinschaftliches Maass haben, um sie sämmtlich mit einer, dem leichten practischen Gebrauch entsprechenden kleinen Anzahl gleicher Stufen genau darstellen zu können. Allgemein lässt sich diess so vorstellen. Sollte eine gleichstufige Leiter den Stammaccord C E G c völlig genau darstellen, so müsste die Stufenweite ein Tonverhältniss x sein, unter dessen Potenzen x^2 , x^3 , x^4 u. s. w. die Stamm-Intervalle $\frac{5}{4}$, $\frac{6}{5}$ und $\frac{4}{3}$ genau mit vorkommen, weil aus der Zusammensetzung dieser Verhältnisse der obige Stammaccord entsteht. Man müsste also haben $x^m = \frac{5}{4}$, $x^n = \frac{6}{5}$, $x^r = \frac{4}{3}$ und folglich $x^{(m+n+r)} = 2$, wo m , n und r ganze Zahlen bedeuten. Hieraus würde aber unter andern folgen, dass

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{r}} = 2^{\frac{1}{(m+n+r)}} \text{ oder } \left(\frac{4}{3}\right)^{m+n+r} = 2^r$$

was unmöglich ist, weil keine ganze Potenz von $\frac{4}{3}$ einer ganzen Potenz von 2 oder in andern Ausdrücken: keine Summe von reinen Quarten einer Summe von Octaven jemals genau gleich werden kann. Daher die absolute Nothwendigkeit der Temperatur der Intervalle für Instrumente mit fester Stimmung. Aus Obigem folgt dann ferner

$$\frac{\log. \frac{5}{4}}{m} = \frac{\log. \frac{6}{5}}{n} = \frac{\log. \frac{4}{3}}{r}$$

d. h. es müssen sich verhalten $m : n : r$

wie $\log. \frac{5}{4} : \log. \frac{6}{5} : \log. \frac{4}{3}$

oder in unsern Logarithmen wie 322 : 263 : 415

Je genauer also m , n und r , oder die Intervalle C E, E G und G c diesen Verhältnissen entsprechen, desto vollkommener muss die Tonleiter sein.

V. Ueber die Grösse der zulässigen Abweichungen von der Reinheit der Intervalle.

§. 89.

Wir haben hier überhaupt zwei Fälle zu unterscheiden: 1ster, wenn bloss von einem Instrumente die Rede ist, auf welchem für sich allein ein Tonstück vorgetragen werden soll; 2ter, wenn das Zusammenspiel mehrerer Instrumente in Frage kommt, oder der Instrumental-Vortrag mit Gesang verbunden ist. Im ersten Falle ist die Abweichungsgrenze merklich grösser als im zweiten Falle, weil das Gehör an die wahre Höhe der Töne weder durch Singstimmen noch durch begleitende Instrumente erinnert, folglich der Maassstab für die Reinheit eines Intervalles nur aus dem Gefühl entlehnt wird und nur eine Vergleichung mit dem Grundtone Statt findet. Hier ist bloss erforderlich, dass die Intervalle bei ihrer Zusammensetzung in Accorde einander nicht allzusehr stören, auch ist hier ein Zunehmen der Abweichung für weniger consonirende Intervalle (§. 60) erlaubt. Für den 2ten Fall wird aber die Grenze weit enger. Geben nämlich nicht alle Instrumente und Singstimmen ein Intervall gleich gross an, so entsteht das eigentliche Distoniren, indem die höhern Töne des Intervalles nicht bloss gegen den Grundton, sondern auch, und zwar noch empfindlicher, gegen einander selbst streiten und die eigentliche Unreinheit (undeutlich übereinander greifende Tonbilder) erzeugen. Hier wird also die Abweichung nur sehr gering sein dürfen, so dass sie sich im Zusammenspiel verlieren kann. Wir wollen zunächst zu erörtern suchen, in wie weit man sich überhaupt wohl bei der Instrumentalmusik der Reinheit der Töne nähern könne. Bei Instrumenten mit fester Stimmung hängt die Genauigkeit theils von der mechanischen Vollkommenheit des Instruments, theils von der Fertigkeit des Stimmers ab, und man darf annehmen, dass hier allen Forderungen entsprochen werden kann; bei Bogeninstrumenten aber beruht die Reinheit des Spieles auf der Genauigkeit der Abtheilung der Saiten oder auf der sogenannten Applicatur und auf der Güte der Saite selbst in Bezug auf gleichförmige Dichtigkeit und Dicke (§. 73). Gute Saiten vorausgesetzt, wollen wir jetzt berechnen, welche Abweichungen bei einem als möglich anzunehmenden Applicaturfehler entstehen.

Hierzu dient unmittelbar die im §. 71 entwickelte Formel $1 + \frac{n}{L} =$ dem Exponenten der Abweichung. Das dortige n bedeutet hier den Applicaturfehler und L die Länge des Saitentheiles vom wahren Aufsetzpuncte bis zum Stege des Instruments. Es folgt hieraus zunächst im Allgemeinen, dass für einerlei Applicaturfehler n die Abweichung um so grösser wird, je kleiner L oder je grösser das anzugebende Intervall an sich ist, weil dann der Werth $\frac{n}{L}$ grösser

wird. Diess erklärt uns zunächst schon die Schwierigkeit des reinen Spieles bei den höhern Tönen der Bogen-Instrumente überhaupt, was wir an einem bestimmten Beispiele noch näher erkennen werden. Die Länge der Saiten auf der Violine ist ungefähr 142 par. Linien. Soll der Spieler auf irgend einer Saite derselben die reine Quinte greifen, so muss er diese Saite bis auf $\frac{2}{3}$ ihrer Länge verkürzen. Gesetzt, er weiche um $\frac{1}{5}$ par. Linie oder um $\frac{1}{710} = 0,0014$ der ganzen Saite ab, so würde der Exponent des Intervalles zwischen der reinen Quinte und der vom Spieler angegebenen $= 1 + \frac{0,0014}{\frac{2}{3}} = 1,0021$ sein, welchem nach §. 72 in unsern Logarithmen die Zahl 3 angehört, die Abweichung würde also $\frac{1}{8}$ vom grossen Comma betragen. Derselbe Fehler in der Applicatur bei der Decime würde für den Abweichungsexponenten schon $1 + \frac{0,0014}{\frac{5}{5}} = 1,0035$ oder in Logarithmen die Zahl 5 geben. Folgende Uebersicht giebt eine hinreichende Vorstellung von der Wirkung verschiedener Applicaturfehler bei den hauptsächlichsten Intervallen; es sind übrigens darin die Applicaturfehler nur bis auf Zehnthelchen der pariser Linie genau angegeben.

Applicaturfehler bei den Intervallen									Log. der Abweichung
3 ^b	3	4	5	6 ^b	6	7 ^b	7	8 ^{va}	
0,2	0,2	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	2
0,3	0,3	0,3	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	4
0,5	0,5	0,4	0,4	0,4	0,3	0,3	0,3	0,3	6
0,7	0,6	0,6	0,5	0,5	0,5	0,4	0,4	0,4	8
0,8	0,8	0,7	0,6	0,6	0,6	0,6	0,5	0,5	10
1,0	0,9	0,9	0,8	0,7	0,7	0,7	0,6	0,6	12
1,2	1,1	1,0	0,9	0,9	0,9	0,8	0,7	0,7	14
1,3	1,3	1,2	1,1	1,0	0,9	0,9	0,8	0,8	16
1,5	1,4	1,3	1,2	1,1	1,1	1,0	0,9	0,9	18

In der nächstfolgenden Octave werden für die nämlichen Applicaturfehler die Abweichungen doppelt so gross, in der 3ten Octave 4mal so gross, als sie hier für die erste Octave angegeben sind. Nimmt man $\frac{1}{3}$ par. Linie als die Grenze an, welche selbst der fertigste Spieler nicht allezeit in der Genauigkeit der Applicatur möchte verbürgen können, so würde nach Vorigem die aus der Unvollkommenheit des Mechanischen der Kunst entstehende Abweichung ein Mittel auf $\frac{6}{1000}$ Octave zu setzen sein. Hiernach schon erscheint also die Abweichung von 0,006 Octave bei der Quinte und gr. Terz im 19stufigen gleichschwebend temperirten System als eine zulässige, dagegen erhellt, dass eine Abweichung von $11\frac{1}{3}$ Tausendtheil Octave, wie sie das 12stufige gleichschwebend temperirte System für die gr. Terz erfordert, schon bei einem Violinspieler von mittelmässiger Fertigkeit nicht mehr vorkommen werde, indem diess gegen $\frac{9}{10}$ par. Linie im Griffe der gr. Terz voraussetzen würde.

§. 90.

Nach §. 40 erzeugen zwei einander sehr nahe liegende Töne in 1 Secunde so viele Stösse, als die Differenz der absoluten Pulszahlen jener Töne beträgt. Umgekehrt muss man also auch aus der Anzahl der Stösse das zwischen den erzeugenden Tönen Statt findende Pulsverhältniss oder Intervall ermitteln können, wenn die absolute Pulszahl von einem der beiden erzeugenden Töne bekannt ist. Es erhellt zunächst leicht, dass für einerlei Intervall die Stösse desto schneller erscheinen müssen, in je höherer Region das erzeugende Intervall liegt.

Folgende Uebersicht stellt in unsern Logarithmen oder in Tausendtheilchen der Octave die Grössen der Intervalle dar, welche in verschiedenen Regionen zu 1. 2. 3. 4. etc. Stössen gehören.

Stösse	Absolute Puls- zahlen.	Log. des Interv.	Absolute Puls- zahlen.	Log. des Interv.	Absolute Puls- zahlen.	Log. des Interv.	Absolute Puls- zahlen.	Log. des Interv.	Absolute Puls- zahlen.	Log. des Interv.
1	$\frac{66}{66}$	22	$\frac{132}{131}$	11	$\frac{264}{263}$	6	$\frac{440}{439}$	3	$\frac{528}{527}$	3
2	$\frac{66}{64}$	44	$\frac{132}{130}$	22	$\frac{264}{262}$	11	$\frac{440}{438}$	6	$\frac{528}{526}$	5
3	$\frac{66}{63}$	67	$\frac{132}{129}$	33	$\frac{264}{261}$	16	$\frac{440}{437}$	10	$\frac{528}{525}$	8
4	$\frac{66}{62}$	90	$\frac{132}{128}$	44	$\frac{264}{260}$	22	$\frac{440}{436}$	13	$\frac{528}{524}$	11
5	$\frac{66}{61}$	113	$\frac{132}{127}$	56	$\frac{264}{259}$	27	$\frac{440}{435}$	16	$\frac{528}{523}$	14
6	$\frac{66}{60}$	137	$\frac{132}{126}$	67	$\frac{264}{258}$	33	$\frac{440}{434}$	20	$\frac{528}{522}$	16
7	$\frac{66}{59}$	161	$\frac{132}{125}$	78	$\frac{264}{257}$	38	$\frac{440}{433}$	23	$\frac{528}{521}$	19
8	$\frac{66}{58}$	186	$\frac{132}{124}$	90	$\frac{264}{256}$	44	$\frac{440}{432}$	26	$\frac{528}{520}$	22
9	$\frac{66}{57}$	211	$\frac{132}{123}$	102	$\frac{264}{255}$	50	$\frac{440}{431}$	30	$\frac{528}{519}$	25
10	$\frac{66}{56}$	238	$\frac{132}{122}$	113	$\frac{264}{254}$	56	$\frac{440}{430}$	33	$\frac{528}{518}$	27
11	$\frac{66}{55}$	263	$\frac{132}{121}$	125	$\frac{264}{253}$	61	$\frac{440}{429}$	36	$\frac{528}{517}$	30
12	$\frac{66}{54}$	290	$\frac{132}{120}$	137	$\frac{264}{252}$	67	$\frac{440}{428}$	40	$\frac{528}{516}$	33

Diese Beispiele gelten, wie man sieht, für die Töne C, c, $\bar{c}$, a und $\bar{c}$ von beziehentlich 66, 132, 264, 440 und 528 Schwingungen in 1 Zeitsecunde, und zeigen, dass bei C eine Verstimmung von $\frac{90}{1000}$ Octave oder um mehr als einen halben Ton erforderlich ist, wenn 4 Stösse in der Secunde erscheinen sollen, dass dagegen bei c schon eine Verstimmung von $\frac{44}{1000}$ Octave oder um $\frac{1}{4}$ Ton, bei $\bar{c}$ schon eine Abweichung von $\frac{1}{8}$ Ton oder $\frac{22}{1000}$ Octave, und endlich bei $\bar{c}$ der blosse Unterschied zwischen der reinen und temperirten grossen Terz im 12stufigen System an $\frac{11}{1000}$ Octave hinreicht, um 4 Stösse in 1 Secunde zu erzeugen.

Nicht bloss mittelst des Monochords und der Sirene (§. 72. 73), sondern auch mit Hülfe jener Stösse können wir daher, und zwar mit einer über das practische Bedürfniss weit hinausreichenden Genauigkeit, untersuchen, bis wie weit das Ohr die Verschiedenheit zwischen zwei nahe im Einklang stehenden Tönen noch zu erkennen vermöge. Das geübte Gehör wird hiernach ungefähr folgendes Urtheil fällen. Eine Abweichung von $\frac{2}{1000}$ Octave ist nur mit grösster Aufmerksamkeit und bei Abwesenheit jeder andern Störung des Gehörs zu erkennen, deutlicher aber schon eine Abweichung von 3 bis 4 Tausendtheil Octave. Eine Abweichung von $\frac{6}{1000}$ Octave wird zwar bei gehöriger Stille sofort fühlbar, sie verliert sich aber beim Mitklingen anderer harmonirender Töne und ist bei einer mittlern Consonanz nur dem geübten Gehör erkennbar. Eine Abweichung von $\frac{12}{1000}$ Octave ist im Einklange und in der Octave störend und wird auch noch an den mittlern Consonanzen, Terzen und Sexten, im vollen Accorde noch merklich empfunden, besonders wenn ein anderes Instrument oder eine Singstimme diese Consonanzen zu gleicher Zeit rein angeben; sie verliert sich indess bei den unvollkommenen Dissonanzen. Die Abweichung eines ganzen Comma (§. 49) ist an den mittlern Consonanzen störend, zulässig aber bei den unvollkommenen Dissonanzen.

Man wird also $\frac{1}{3}$ Comma oder $\frac{6}{1000}$ Octave als die höchste zulässige Abweichung im Allgemeinen betrachten können, weil, wenn alle Instrumente etc. dieselbe Abweichung zugleich angeben, die Reinheit des Spiels fast gar nicht leidet, anderenfalles aber die Schwebung im Zusammenklange sich ebenfalls beinahe gänzlich verliert, indem das Ohr gleichsam weder Zeit noch Ruhe hat, um den geringen Unterschied empfinden zu können. Für Pianoforte allein würden $\frac{2}{3}$ Comma bei den unvollkommenen Consonanzen und 1 Comma bei den unvollkommenen Dissonanzen noch zulässig erscheinen, dagegen aber im Zusammenspiel mit andern Instrumenten mit reiner Stimmung schon diejenige Stumpfheit geben, welche sich bei einem in den einzelnen Saiten jedes Tones nicht völlig rein gestimmten Pianoforte zu erkennen giebt, und der Musik ausnehmend viel von ihrem Reize entzieht.

VI. Ungleichschwebende Temperaturen.

§. 91.

Nachstehende Tafel gewährt eine Uebersicht der Abweichungen, welche in der Dur- und Moll-Tonleiter jedes einzelnen Tones der *Kirnberger'schen* Scala vorkommen:

	2.	3 ^b .	3.	4.	5.	6 ^b .	6.	7 ^b .	7.
C	0	-18	0	0	0	-18	+9	-18	0
C [#]	0	-16	+18	-2	0	-7	+18	-16	+18
D	-18	-18	0	0	-9	-18	0	-18	-2
E ^b	0	-16	+18	0	0	-16	+18	-18	+18
E	0	0	+16	+9	0	0	+16	0	+16
F	0	-18	+9	0	0	-18	+18	-18	0
F [#]	-2	-9	+16	0	-2	0	+16	-18	+16
G	-9	-18	0	0	0	-18	0	-18	0
A ^b	0	-16	+18	0	0	-16	+18	-16	+18
A	-9	-9	+7	+9	-9	-9	+9	-9	+7
B	0	-18	+18	0	0	-16	+18	-18	+9
H	-2	0	+16	0	0	0	+16	-9	+16

Es ergibt sich daraus sogleich, wie sehr diese Scala die natürliche Reinheit verletzt; man findet darin z. B. die grossen Terzen von E, F[#], H um 16, die von C[#], E^b, A^b, B um 18 Tausendtheilchen der Octave zu hoch, die kleinen Terzen von C[#], E^b, A^b um 16, die von C, D, F, G, B um 18 Tausendtheilchen der Octave zu tief, die Quinten von D und A um $\frac{9}{1000}$ zu tief, die grössere Hälfte der kleinen Sexten um 16 bis 18 zu tief, der grossen Sexten um so viel zu hoch etc. Nach Maassgabe der Dreiklänge, welche hierbei vorzüglich ins Auge zu fassen sind, würden also die Characterare der *Kirnberger'schen* Tonarten folgende sein:

In Dur { C, D, G am reinsten,
F, A härter,
F[#], E^b, H noch härter,
C[#], E^b, A^b, B am härtesten.

In Moll { E, H am reinsten,
F[#], A weicher,
C[#], E^b, A^b noch weicher.
C, D, F, G, B am weichsten.

Aehnliche Unvollkommenheiten wird man auch an jeder andern ungleichschwebenden Temperatur finden. Es ist nämlich eine unausweichliche Folge solcher Temperaturen, dass, je mehr man für einzelne Töne die Reinheit einiger Hauptintervalle zu erreichen sucht, die Abweichungen für andere Töne desto grösser und störender werden (§. 94). So wird man in der ersten *Malcolm'schen* Scala für die Terz $E G^\sharp$ den ganz übermässigen Werth 356, die völlig unbrauchbaren Quinten DA und $E^\flat B$ zu 567, $F^\sharp c^\sharp$ zu 601; in dessen 2ter Scala für $E G^\sharp$ den Werth 341, für $E^\flat B = 576,5$, für $DA = 567$; nach *Rousseau's* vermeintlicher Verbesserung dieser Scalen die Terz $D^\flat F$ zu 356 etc. finden.

§. 92.

Die Lobredner dieser ungleichschwebenden Temperaturen und unter ihnen vorzüglich *Rameau*, welcher übrigens sein Urtheil späterhin selbst widerrief, suchten jene Abweichungen gerade als einen wichtigen Vortheil darzustellen, indem die verschiedenen Terzen als sehr mächtige Hülfsmittel in der Musik gebraucht werden könnten. Während die reine grosse Terz zur Freude stimme, könne man mit schärferen Terzen bis zum Zorn entflammen, durch die reine kleine Terz Wohlwollen und Zärtlichkeit erregen und durch noch weichere Terzen endlich in Traurigkeit setzen. Insbesondere wurden die ungleichen Schwebungen auch von dem sonst so scharfsichtigen und feinfühlenden Kunstrichter *Sulzer* —, Theor. d. sch. Künste, Art. Temperatur d. Töne —, welcher *Kirnbergers* Ansichten folgte, vertheidigt, indem jene verschiedenen Intervalle bei den Bewegungen, welche im reinen Gesange gegen einander geschähen, wirklich zum Vorschein kämen und deshalb auch in der Instrumentalmusik dargestellt werden müssten, um kein Distoniren zu erzeugen. Man schloss hieraus auf eine wirkliche Verschiedenheit der Tonarten, deren grosse Wichtigkeit bei der gleichen Schwebung ganz vernachlässiget werde. Es scheint aber hierbei der wichtige Umstand übersehen worden zu sein, dass man zwischen der unendlichen Mannigfaltigkeit der Intervalle und der practisch darstellbaren Anzahl derselben, zwischen den bloss abgeleiteten und den einfachsten Intervallen zu unterscheiden habe; dass jene Intervalle beim Gesange höchstens nur vorübergehend, nämlich nur während der noch zweifelhaften Modulation oder bei der blossen Fortschreitung vorkommen können, dass sie dagegen von der Zeit an, wo der Sänger die Gewissheit des Uebergangs in einen neuen Ton erkennt, schon während der Vorbereitung zu diesem Uebergange dergestalt temperirt werden, dass sie in dem Augenblicke, wo der neue Grundton das Gefühl beherrscht, sogleich in die, diesem neuen Grundtone angehörigen reinen Intervalle übertreten (s. §. 118). Kein guter Sänger wird Terzen und Quinten, welche während der Modulation um ein ganzes oder halbes Comma von der völligen Reinheit abweichen, noch ferner in diesen Verhältnissen aushalten, wenn sich der neue Grundton im Gefühle festgesetzt hat. Von jener Ansicht, welche die blosser minder erhebliche Mannigfaltigkeit der Tonfolgen auf Kosten der Harmonie begünstigte, hat sich daher auch das natürliche Gefühl bald abgewendet, weil seine Forderung, die grösste Annäherung an die volle Reinheit der harmonischen Intervalle für jeden Grundton zu erreichen, hier am wenigsten befriedigt wurde. Mit Recht ist man daher auch von jener Ansicht zurückgekommen und hat der gleichen Schwebung, welche ohne alle Willkühr sich einzig auf die Gesetze der Harmonie gründet und jedem Tone seine harmonischen Intervalle in möglichster Reinheit zu verschaffen sucht, den Vorzug eingeräumt.

VII. Gleichschwebende 12stufige Temperatur.

§. 93.

Jede gleichschwebende Temperatur giebt allen Tönen des Systems die nämlichen Intervalle, wie solche für den Ton C daraus entspringen (§. 85); wir dürfen also nur die Intervalle von C betrachten, um das Eigenthümliche solcher Temperaturen überhaupt zu übersehen. Bei der 12stufigen gleichen Schwebung ist nach §. 86 die Stufenweite $= 83\frac{1}{3}$, jeder Ton steht von seinem Nachbar um dieses Intervall ab. Zwei solche Stufen geben die Höhe oder Grösse des ganzen Tones zu $166\frac{2}{3}$; drei die kleine Terz zu 250; vier die grosse Terz zu $333\frac{1}{3}$ u. s. w. In der III. Tafel sind diese Werthe für alle Töne zusammengestellt und es ergeben sich daraus für die hauptsächlichsten Intervalle folgende Abweichungen von der Reinheit:

grosse Secunde	—	$3\frac{1}{3}$	kleine Septime	+	$3\frac{1}{3}$
kleine Terz	—	13	grosse Sexte	+	13
grosse Terz	+	$11\frac{1}{3}$	kleine Sexte	—	$11\frac{1}{3}$
Quarte	+	$12\frac{2}{3}$	Quinte	—	$12\frac{2}{3}$

Die Intervalle sind hier ihren Octavcomplementen gegenübergesetzt, um zugleich auch hier mit übersehen zu lassen, dass z. B. die gr. Sexte nothwendig um $\frac{13}{1000}$ Octave zu scharf werden muss, wenn die kl. Terz um — 13 abweicht, oder um 13 unter sich schwebt (vergl. §. 86). Quarten und Quinten sind, wie man sieht, fast völlig rein, die Terzen und Sexten nur um ungefähr $\frac{2}{3}$ eines grossen Comma abweichend und die kleine Septime nähert sich der Doppelquarte oder kl. Septime von $\frac{16}{9}$ oder 830 bis auf $3\frac{1}{3}$ (vergl. §. 61). Während also die ungleichen Schwebungen, z. B. die *Kirnberger'sche*, in den oft vorkommenden Tonarten $E^\flat$, $A^\flat$ und B grosse Terzen

geben, welche um ein ganzes grosses Comma zu hoch, folglich höchst störend sind, nähert sich jene gleiche Schwebung der Reinheit aller Intervalle weit mehr und zwar überhaupt auf eine Weise, welche bei der festgesetzten Anzahl von 12 Stufen die möglichst vollkommenste ist. Allerdings ist auch sie von dem Uebelstande nicht frei, dass die Terzen und Sexten für das feine Gefühl sich merklich von der Reinheit und Wohlgefälligkeit entfernen, was vorzüglich bemerkt wird, wenn ein guter Violinspieler oder Violoncellist das Spiel auf einem gleichschwebend temperirten Pianoforte begleitet, indess ist diess in unserm 12stufigen Systeme durchaus nicht zu vermeiden und die Abweichungen werden, wenigstens im Einzelnen, grösser, wenn man einzelnen Tonarten ganz reine Terzen etc. geben will. So lange wir uns von unserm 12stufigen Systeme nicht trennen, was auch in der That nicht so leicht zu erwarten sein möchte, wird die eiserne Nothwendigkeit uns jene Abweichungen erträglich machen müssen, da man sich auf keinen Fall des grossen Hülfsmittels begeben darf, jeden Ton im Systeme als Grundton gebrauchen zu können.

§. 94.

Um die bei uns bekannteste *Kirnberger'sche* und die gleichschwebende 12stufige Temperatur mit dem theoretischen Systeme im Allgemeinen vergleichen zu können, dient die III. Tafel, welche die Höhen oder Log. der Töne sowie deren Saitenlängen und Pulsverhältnisse in Zahlen angiebt. Für das Auge ist die Lage der Töne auf Fig. 23 dargestellt, woraus sich das Zusammentreffen oder Abweichen sogleich sinnlich ergibt. In beiden Tafeln zeigen übrigens die Klammern an, welche Töne des theoretischen Systems auf einer und der nämlichen Saite unsers 12stufigen Systems ausgeübt werden. Die Figur zeigt, dass in der gleichschwebenden 12stufigen Temperatur das D nur um $3\frac{1}{2}$ niedriger liegt als das theoretische D auf der Scala (E'); dass ferner die Quarte F um eben so viel über sich als die Quinte unter sich schwebt, dass die Sexte A um 13 gegen das reine A zu hoch ist etc.; dass in der *Kirnberger'schen* Scala (K') die Töne C, D, E, F, G, H mit den gleichnamigen theoretischen Tönen zusammenfallen, C $\sharp$, E $\flat$, F $\sharp$, A $\flat$, A und B aber tiefer liegen als in der gleichschwebend temperirten Scala, u. s. w.

Wenn wir nicht bereits gefunden hätten, dass die *Kirnberger'sche* Stimmung sehr bedeutende Abweichungen herbeiführt, so könnte der Anblick der Figur 23 oder das Zusammenfallen der Töne C, D, E, F, G, H mit den gleichnamigen reinen Tönen zu dem irrigen Urtheile verleiten, dass diese Stimmung genauer als die gleichschwebende sein müsse. Fassen wir aber die reine grosse Terz oder die Länge C E mit dem Zirkel und messen reine Terzen für C $\sharp$, E, F $\sharp$, A $\flat$ ab, so entdeckt sich sogleich, dass die Töne F, A $\flat$, B c, welche diese Terzen darstellen sollen, viel zu hoch liegen, um für annehmbar gehalten werden zu können. Natürlich muss, wenn die Terz C E völlig rein oder = 322 genommen wird, zwischen E und c ein Intervall von 678 übrig bleiben, woraus für jede der beiden übrigen Terzen E G $\sharp$ und A $\flat$ c eine Grösse von 339 also eine Abweichung von $\frac{17}{1000}$ Octave folgt, u. s. w. Wir finden also hierin nur die Bestätigung, dass die ungleichförmige Vertheilung dieser unvermeidlichen Abweichungen im Einzelnen noch grössere Mängel erzeugt, als die gleichschwebende Temperatur.

Beide Temperaturen haben in Summa genau dieselben Abweichungen, z. B. 34 für die 3 grossen Terzen, 52 für die 4 kleinen Terzen, 20 für die 12 Quinten oder Quarten etc. und ihr wesentlicher Unterschied besteht bloss darin, dass die gleichschwebende Temperatur diese summarischen Abweichungen auf sämtliche zugehörigen (gleichnamigen) Intervalle gleichmässig vertheilt, während die ungleichschwebende Temperatur einige solche Intervalle ganz rein stimmt und die unvermeidliche summarische Abweichung den übrigen gleichnamigen Intervallen allein aufbürdet. Die gleichschwebende Temperatur hat also nur der Menge nach mehr Abweichungen, nicht aber dem Werthe nach; sie hat zwar ausser der Octave nicht ein einziges ganz reines Intervall, die Abweichungen sind aber bei den gleichnamigen Intervallen *) überall von gleicher Grösse und daher in Folge der Vertheilung geringer als bei jenen Temperaturen.

Wer also für einige Tonarten ganz reine Terzen und Quinten verlangt, muss sich desto grössere Unreinheit dieser Intervalle bei andern Tonarten gefallen lassen und wer andererseits der Natur darin treu zu bleiben wünscht, dass er keiner Tonart vor der andern einen Vorzug einräumt und lieber mehr kleinere, als weniger aber störende Abweichungen zulassen will, wird sich für die gleichschwebende Temperatur entscheiden müssen.

VIII. Gleichschwebende 19stufige Temperatur.

§. 95.

Auf Tafel III und unter der Ziffer 19 in Figur 23 ist zugleich auch die 19stufige Temperatur mit vorgestellt worden, eine Scala, welche in vieler Hinsicht ein noch vollkommneres Tonsystem geben würde, als unsere

*) Durch die Bezeichnung gleichschwebende Temperatur lasse man sich also nicht zu der irrigen Meinung verleiten, als wären bei dieser Temperatur alle Intervalle gleichschwebend oder um einerlei Abweichung von der wahren Höhe temperirt; nur die Stufen sind überall gleich und nur die gleichnamigen Intervalle haben einerlei Abweichung, nämlich jede gr. Terz + $11\frac{1}{2}$, jede Quinte — $1\frac{1}{2}$, jede kl. Terz — 13, jede gr. Sexte + 13 etc.

jetzige 12stufige. Alle Consonanzen ohne Ausnahme würden nämlich nur innerhalb $\frac{1}{3}$ Comma von der völligen Reinheit abweichen, die höchste Differenz aber würde nur $\frac{2}{3}$ Comma betragen und zwar bei der gr. Secunde und gr. Septime, bei Intervallen also, welche diese Abweichung als Dissonanzen auch gerade am besten vertragen.

Der allgemeinen Einführung dieses reicheren Tonsystems würden sich allerdings sehr bedeutende Schwierigkeiten entgegenstellen, doch halte ich die Anwendung desselben auf Claviaturinstrumenten oder überhaupt auf Instrumenten mit fester Stimmung nicht für unausführbar, selbst nicht für unwahrscheinlich.

Am leichtesten lässt sich dasselbe auf der Guitarre ausführen, zu welchem Behuf auf Tafel III die Saitenlängen für diese Temperatur mit angegeben worden sind. Wird nämlich die Länge vom Sattel bis zum Stege der Guitarre in 1000 gleiche Theile getheilt, so geben jene Saitenlängen die Lage der Bünde auf dem Griffbrette an.

Wie man diese 19stufige Scala auf die Sirene zeichnen kann, ist bereits §. 67 gezeigt worden.

So lange diese Scala nicht wirklich eingeführt wird, kann sie wenigstens als erläuternde Grundlage unsrer musikalischen Orthographie dienen, indem sie zwischen der vollkommen naturgemässen und unsrer jetzigen practischen Scala die Mitte hält. An der 19stufigen Scala kann man sich die Natur der feineren enharmonischen Uebergänge (§. 118) deutlicher versinnlichen, als an der enharmonischen Tonleiter (§. 47), bei welcher letzteren für jeden einzelnen Ton eine besondere Erläuterung über die gefundenen Abweichungen nöthig sein würde, was dem gründlichen Verständniss grosse Schwierigkeiten in den Weg legt. An der 19stufigen Scala würde man es sehr leicht verständlich finden, dass aus einem Accorde wie D F[♯] A d durch Erhöhung aller Töne um einen temperirten halben Ton (um eine Stufe) ein neuer ähnlicher Accord D[♯] F[×] A[♯] d[♯] entsteht, indem F[×] (in der IV. Tafel unter 19 mit G^b bezeichnet) so wie alle übrigen Töne des neuen Accords in der Scala auch wirklich vorhanden sind. (vergl. §. 81).

Sechstes Capitel.

Von den Accorden.

I. Theoretische Darstellung der Accorde.

§. 96.

Nach §. 61 und 62 können in consonirenden Accorden andere als nach den einfachen Gefühlsmaassen 2. 3. 5 abmessbare Tonverhältnisse, so wie kleinere Intervalle als $\frac{6}{5}$ nicht vorkommen. Verfahren wir nun, um die möglichen consonirenden Accorde innerhalb der Octave aufzufinden, auf ähnliche Weise wie §. 62, indem wir zwischen die dem Grundton und seiner Octave zugehörigen Pulszahlen 3 und 6, 4 und 8, 5 und 10, u. s. w. noch diejenigen ganzen Zahlen einführen, welche sich durch 2. 3 oder 5 abmessen lassen, und scheiden wir dabei diejenigen aus, welche mit der nächstvorhergehenden oder nächstfolgenden Zahl ein kleineres Verhältniss als $\frac{6}{5}$ bilden würde, so erhalten wir nach einander folgende Accorde:

Pulszahlen.						Zugehörige Töne.					
3	4	5	6	.	.	G	c	e	g	.	oder c f a $\frac{c}{c}$
.	4	5	6	8	.	.	c	e	g	$\frac{c}{c}$	c e g $\frac{c}{c}$
.	.	5	6	8	10	.	.	e	g	$\frac{c}{c}$ e	c e ^b a ^b $\frac{c}{c}$
10	12	15	20	.	.	c	e ^b	g	$\frac{c}{c}$	.	c e ^b g $\frac{c}{c}$
.	12	15	20	24	.	.	e ^b	g	$\frac{c}{c}$	e ^b	c e a $\frac{c}{c}$
.	.	15	20	24	30	.	.	g	$\frac{c}{c}$	e ^b g	c f a ^b $\frac{c}{c}$

von einerlei Grundton aus gerechnet.

Wir brauchen diese Reihen nicht weiter zu verfolgen, indem die weggelassenen nichts als blosser Wiederholungen der hier dargestellten sind. Betrachten wir nun diese sechs Accorde genauer, so erkennen wir leicht, dass sie sich sämmtlich auf zwei, bloss in der Terz von einander verschiedene Grundaccorde

$$\begin{array}{cccc} 4 & 5 & 6 & 8 \\ c & e & g & \frac{c}{c} \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{cccc} 10 & 12 & 15 & 20 \\ c & e^b & g & \frac{c}{c} \end{array}$$

oder, allgemein ausgedrückt, auf den sogenannten Dur- und Moll-Vierklang zurückführen lassen, indem alle übrigen consonirenden Accorde aus blossen Versetzungen oder Umkehrungen (§. 49) der diese Grundaccorde bildenden Töne oder Intervalle bestehen.

§. 97.

Unter Weglassung der Octave des Grundtons werden jene sechs Accorde gewöhnlich auf folgende übersichtliche Weise dargestellt und benannt:

Dur.	Moll.
C E G c e	C E ^b G c e ^b
—————	—————
Dreiklang.	Dreiklang.
—————	—————
Sextenaccord.	Sextenaccord.
—————	—————
Sextquartenaccord.	Sextquartenaccord.

§. 98.

Man erkennt hiernächst leicht, dass alle consonirenden viertönigen Accorde innerhalb der Octave aus den drei, zu Ausfüllung der Octave nöthigen consonirenden Intervallen $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{4}$ und $\frac{6}{5}$ oder aus der Quarte, grossen und kleinen Terz bestehen.

§. 99.

Es erhellet ferner von selbst, dass dissonirende Accorde desto aufregender sein müssen, je mehr Dissonanzen im Accorde vorhanden und je schärfer dieselben an sich sind. Entlehnen wir nun aus der Erfahrung, dass das Verhältniss $\frac{10}{9}$ oder log. 152 die Grenze ist, bis zu welcher zwei Töne äussersten Falles einander nahe kommen und zugleich erklingen können, ohne an das Missfällige eines und desselben bloss unreinen Klanges zu erinnern, kleinere Intervalle als 152 aber nur als Stufen zum baldigen Uebergang in einen nächstfolgenden consonirenden Ton, oder als Vorhalte oder Durchgangsnoten benutzt werden können; so folgt, dass in einfach dissonirenden Accorden weder innerhalb der kleinen noch innerhalb der grossen Terz ein dritter Ton Statt finden kann, weil der eingeführte Ton gegen seine Nachbarn zugleich dissoniren, folglich eine schärfere Dissonanz erzeugen würde, als wenn er nur gegen einen derselben dissonirt, mit dem andern aber ein consonirendes Intervall bildet. Es ist daher nur das Quartintervall zu Aufnahme eines einfach dissonirenden Tons geeignet. Da es nun nach §. 61 überhaupt nur folgende sechs einfachen Intervalle giebt, welche in das Quartintervall eingeführt werden können, ohne dessen Endpuncten näher als $\frac{152}{1000}$ Octave zu kommen, nämlich $\frac{10}{9}$, $\frac{9}{8}$, $\frac{8}{7}$, $\frac{7}{6}$, $\frac{32}{27}$ und $\frac{6}{5}$ oder in Logarithmen 152, 170, 193, 222, 245 und 263, so ergiebt sich zunächst folgende Reihe einfach dissonirender Accorde

152	170	193	222	245	263	} Quartintervall.
7 $\frac{1}{5}$. B	7 $\frac{1}{9}$. f	6. K	6 $\frac{6}{7}$. I	6 $\frac{3}{4}$. d	6 $\frac{2}{3}$. A	
263	245	222	193	170	152	
6. G	6. d	6. G	6. G	6. c	6. G	
263	263	263	263	263	263	
5. E	5. H	5. E	5. E	5. A	5. E	
322	322	322	322	322	322	
4. C	4. G	4. C	4. C	4. F	4. C	

Ebenso in Moll nach blosser Verwechslung der Lage der beiden untersten Terzen 322 und 263. Aus jedem dieser beiden untersten Accorde in Dur und Moll würden dann durch Umkehrung noch zwei andere abgeleitete Accorde entstehen.

§. 100.

Wenn, wie §. 99 geschehen, der zweite Endpunct des Quartintervalls oder die Octave des Grundtons nicht mit dargestellt, folglich als höhere Potenz des letztern nur in der Vorstellung mit empfunden wird, so erhellet, dass dann die erste Hälfte jener sechs Accorde wohlgefälliger sein werde, als die zweite, weil vom getheilten Quartintervall bloss die kleinen Terzen GB, df, GK wirklich vorhanden sind, die eigentlichen Dissonanzen Bc, fg, Kc aber nur in der Vorstellung oder — in weiterer Abmessung — in ihren Octavcomplementen CB, Gf, CK als Septimen empfunden werden, während bei der zweiten Hälfte das Umgekehrte Statt findet, nämlich die milderen Intervalle Ic, df, ac bloss in der Vorstellung, die eigentlichen Dissonanzen GI, cd, GA aber wirklich erklingen.

§. 101.

In unserm practischen Systeme ist übrigens die Anzahl dieser einfach dissonirenden Accorde weit kleiner. Da wir nämlich die aus der Zahl 7 entspringenden Töne gar nicht, statt der beiden verschiedenen ganzen Töne $\frac{9}{8}$ und $\frac{10}{9}$ oder 170 und 152 aber nur einen einzigen ganzen Ton von 166 $\frac{2}{3}$ haben, welcher beide zugleich vorstellen muss; so besitzen wir von jenen Accorden überhaupt nur folgende vier: C E G B, C E^b G B, C E G A, C E^b G A. Von diesen Accorden kann ferner der 3te als die erste Versetzung des 2ten, der vierte Accord aber in seiner

Versetzung $A C E^b G$ als ein Septimenaccord mit kleiner Terz und verminderter Quinte betrachtet werden, so dass sich unsere einfachen oder wesentlichen Dissonanzaccorde endlich sämmtlich auf die drei Septimen-Accorde $C E G B$, $C E^b G B$, $C E^b G^b B$ reduciren lassen.

§. 102.

In die 2te Ordnung dissonirender vierstimmiger Accorde würde man dann diejenigen rechnen können, wo ein doppeltes Dissoniren, wenn auch nur in der blossen Vorstellung Statt findet. In diese Classe würden innerhalb der Octave bloss die beiden Accorde $C F A^b B$ und $C E^b A^b B$ mit ihren Versetzungen gehören, Accorde, in welchen nämlich nicht das Quartintervall, sondern die grosse Terz zerlegt ist. Ferner von den fünfstimmigen Accorden der sogenannte Nonenaccord $C E G B d$ mit kleiner Septime und grosser None.

§. 103.

In eine noch niedrigere 3te Ordnung gehört endlich die ausserordentlich zahlreiche Classe der blossen Vorhalte oder der zufälligen Dissonanzen, wohin man füglich alle übrigen bisher noch nicht betrachteten Accorde wird rechnen können. Ihr Hauptmerkmal ist, dass sie sich durch Veränderung eines oder mehrerer ihrer Töne um eine einzige Stufe entweder sofort in consonirende Accorde oder doch in bloss einfach dissonirende Accorde verwandeln lassen. Hierher gehört insbesondere der sehr vieldeutige sogenannte verminderte Septimenaccord ($C^{\sharp} E G B$), welcher aus drei übereinanderliegenden kleinen Terzen gebildet ist, und, wie wir §. 117 sehen werden, als unmittelbarer Vorhalt von einer sehr grossen Anzahl einfach dissonirender und consonirender Accorde betrachtet werden kann. Auch lässt sich der dreistimmige Accord $G c f$, welcher aus zwei hintereinanderliegenden Quartan besteht, hierher rechnen, indem man ihn als Vorhalt von dem Accord $G h f$ betrachten kann.

§. 104.

Es versteht sich von selbst, dass alle bisher betrachteten und angedeuteten Accorde überhaupt einer grossen Vervielfältigung fähig sind, indem man sie auf verschiedenen Grundtönen nehmen, ihre Bestandtheile in verschiedene Octavregionen legen, einzelne Theile des Accords weglassen, andere verdoppeln kann. Nimmt man in einem vierstimmigen Accord die zum Grundtone gehörigen drei obern Töne in einer und derselben oder in verschiedenen Octavregionen, so heisst solches im ersten Falle enge, im zweiten zerstreute oder weite Harmonie.

§. 105.

Diese Andeutungen werden vollkommen hinreichen, um zu zeigen, auf welche einfache und bestimmte Weise mit Hülfe der Gesetze des Rhythmus auch die Anzahl und Natur der musikalischen Accorde ermittelt und beurtheilt werden kann. Eine weitere Ausführung würde auch nicht hierher gehören. Die Aufgabe der harmonischen Akustik kann nur darin bestehen, die Grundgesetze der Harmonie und der Musik überhaupt nachzuweisen und aus dem scheinbaren Chaos der Töne die diesen Gesetzen und der menschlichen Kunstfertigkeit gleich nahe entsprechenden Tonleitern für den practischen Gebrauch zu entwickeln.

II. Graphische Vorstellung der Accorde, Accordmesser.

§. 106.

Wie bereits §. 81 gezeigt worden ist, kann man sich die musikalischen Scalen bildlich versinnlichen, wenn man verschiedene gerade Linien nach Maassgabe der Logarithmen jener Scalen eintheilt, indem diese Logarithmen die Abstände der Töne von einander unmittelbar angeben (§. 45). Die Tafel IV enthält dergleichen graphische Scalen. Der mit E' bezeichnete Stab enthält die enharmonische Tonleiter. Von C aus gerechnet folgen nämlich $C^{\sharp}$, D^b , D etc. in den Entfernungen aufeinander, wie sie in der I. Tafel angegeben sind. Unter K' findet man die *Kirnberger'sche* Scala nach den früher bei §. 84 angegebenen Höhenzahlen eingezeichnet. Unter 12 und 19 die gleichstufigen Scalen, bei welchen die volle Octave beziehentlich in 12 und 19 gleiche Theile eingetheilt ist. Die mittlere breitere Scala, der Accordmesser, enthält bloss die Töne, welche zu Bildung der im Vorigen betrachteten Accorde gehören würden, und es sind diese Töne zur Seite in den Scalen S und S' wieder besonders angegeben, zu einem Zweck, der bald erhellen wird, auch befinden sich an diesen Scaln äusserlich noch kleine Ziffern in fortlaufender Ordnung, die wir übrigens nur auf kurze Zeit zu unserer Verständigung brauchen. Bei aufrechter Lage des Accordmessers geben die Linien 1. 3. 5. 12. die genaue Lage der vier Töne an, welche den reinen Dur-Vierklang $C E G c$, oder $F A c f$ oder $G H d g$ bilden; die Linien 5. 12. 14. 15 den reinen Quart-Sexten-Accord $G c e g$ oder $c f a c$ etc.; in umgekehrter Lage (d. i. wenn die Aufschrift Moll oben liegt) geben die Linien 15. 14. 12. 5. den Moll-Vierklang u. s. w. Zum Gebrauch werden sowol die beiden Stäbe (E' , K') und (12, 19) als auch der Accordmesser dergestalt ausgeschnitten, dass der Schnitt genau und scharf an den äussern Längen-

Linien herabgeht, wodurch nunmehr die nicht weiter nöthigen kleinen Ziffern an der Aussenseite der Scalen *S* und *S'* mit abgeschnitten werden, und die Stäbe unmittelbar neben diese Scalen gelegt und beliebig an selbigen verschoben werden können. Legt man nun z.B. den Stab *K'* an die Scale *S* dergestalt an, dass die Linie *D^b C[♯]* der Scala mit der Linie 1 des Accordmessers genau zusammentrifft oder coincidirt, so ergibt sich sogleich, dass das *Kirnberger'sche* *F* viel zu hoch liegt, um als erträgliche Terz zu *D^b* gelten zu können, weil dieses *F* weit über die Linie 3, als der reinen Höhe der grossen Terz hinaustrifft. Legt man *D* an die Linie 1 an, so findet man *A* als Quinte zu tief; für *E^b* ergibt sich wieder *G* als Terz eben so störend, wie *F* für *D^b*. Auf ähnliche Weise lässt sich durch Zusammenlegen der Scalen *E'* und *S'* das oben bereits durch Rechnung Aufgefundene nachweisen, dass nämlich selbst unsere enharmonische Tonleiter noch nicht dazu ausreichen würde, um durchgängig rein spielen zu können, denn für *D^b* würde *F* nicht als Terz, *A^b* nicht als Quinte gelten können, weil sie zu tief liegen würden, u. s. w. Durch Aneinanderlegen der Scalen 12 und *S'* kann man die Eigenthümlichkeiten der 12stufigen gleichschwebenden Temperatur und durch Zusammenhalten der Scalen 19 und *S* die 19stufige Temperatur untersuchen. Es ist überflüssig, diess noch weiter zu erläutern, der Accordmesser zeigt, wie die Töne in den einzelnen Accorden liegen sollten, die Stäbe aber geben an, wie sie theils in theoretischen, theils in practischen Scalen liegen, und die blosser Vergleichung dieser Maasse giebt daher ohne Weiteres die gewünschte Auskunft über die Eigenthümlichkeiten dieser Scalen. Die vorkommenden Abweichungen von der Reinheit lassen sich hierbei in Tausendtheilchen der Octave schätzen, wenn man sie mit dem Raume zwischen der 6ten und 7ten Linie der Scalen *S* und *S'* vergleicht, welcher Raum $= \frac{18}{1000}$ Octave = dem grossen Comma ist. Wir werden nun auch jetzt noch leichter übersehen können, dass unsere Notenschrift nicht auf die enharmonische Tonleiter bezogen werden darf. Aus dem Durdreiklange *E G[♯] H* bilden wir durch einfache Erhöhung aller Töne um eine Stufe einen andern Durdreiklang *E[♯] G^x H[♯]*: man lege nun jetzt das *E[♯]* der enharmonischen Scala an die 1ste Linie der Scala *S'* und man wird finden, dass das als grosse Terz hierzu nöthige *G^x* nahe genau in der Mitte zwischen *A^b* und *A* der enharmonischen Scala liegen müsste, folglich in selbiger gar kein Ton dafür vorhanden ist, und weder *A^b* noch *A* dafür substituirt werden kann. Aus dem Dreiklange *D F[♯] A* bilden wir auf gleiche Weise den Dreiklang *D[♯] F^x A[♯]*; man prüfe diesen am Accordmesser, indem man *D[♯]* an die 1ste Linie anlegt und man wird ihn in der enharmonischen Scala ebenfalls nicht nachweisen können.

§. 107.

Wenn wir also nach der einmal eingeführten Nomenclatur lehren, dass ein einfaches $\sharp$ oder $\flat$ die betreffende Note um einen halben Ton (besser und richtiger um eine Stufe*) erhöhe oder erniedrige, das $\times$ oder $\flat\flat$ aber eine Erhöhung oder Erniedrigung um zwei Stufen bedeute, und wenn wir uns hierbei sorgfältig hüten, statt $f\sharp a\sharp c\sharp$ nicht $f\sharp b c\sharp$ zu schreiben, obschon $a\sharp$ und b in den practischen Scalen nur einerlei Ton bezeichnen, so lässt sich diese Orthographie nur an einer Scala erläutern, welche alle in der Notenschrift vorkommende Töne und zwar zugleich in solcher Stellung enthält, dass sie auch für das Gehör den geschriebenen Accord so nahe genau angeben, als es überhaupt erreichbar ist. Dieser nothwendigen Forderung entspricht bloss die 19stufige Scala; an dieser Scala veranschaulicht sich eben so leicht die Wirkung enharmonischer Rückungen, z. B. aus *C[♯] E G B* durch *C[♯] E F[♯] A[♯]* in *H D[♯] F[♯] H*, als andererseits daraus zugleich die Regeln der Orthographie erhellen. Dass dieser Rechtschreibung gemäss der Ton *G^b* den Namen *F^x* erhält, wenn er die gr. Terz von *D[♯]* darstellen soll etc. erhellet von selbst, die Hauptsache ist die, dass dieses *F^x* etc. auch wirklich in der Scala vorkomme und diess ist hier überall der Fall.

§. 108.

Unsere Notenschrift und practische Tonleiter finden also überhaupt und kurz auf folgende Weise ihre Erklärung. Die reine natürliche Dur- und Moll-Tonleiter ist die oben §. 62 dargestellte; wir wünschen aber diese Tonleiter so nahe genau als unser Gehör verlangt, für jeden einzelnen Ton zu haben und diess würde durch die Eintheilung der Octave in 19 gleiche Stufen erreicht werden.

Man hat sich aber bis jetzt nicht getraut, diese Menge von Stufen auch im Practischen anzuwenden, sondern begnügt sich mit 12 Stufen, welche zwar ein ganz ähnliches aber minder reichhaltiges Tonsystem gewähren. Um nun den grössern Reichthum jener Scala wenigstens in der Vorstellung beibehalten und lesend geniessen zu können, schreiben wir die Musik so, als ob wir diese Scala auch im Practischen hätten, spielen sie aber bloss auf der ähnlichen 12stufigen Leiter, wobei die enharmonischen Unterschiede *C[♯] D^b*, *D[♯] E^b* etc. verloren gehen und nur durch einerlei Ton dargestellt werden; die Stimmung ist dann so eingerichtet, dass z. B. der zwischen *G* und *A* liegende Ton ebensowohl die kleine Sexte von *C* oder den Ton *A^b*, als auch die grosse Terz zu *E* oder den Ton *G[♯]* vorstellen kann.

*) Dieser Ausdruck würde nämlich sowohl auf die practische als auf die theoretische Scala passen, während jener Ausdruck „halber Ton“ nur auf die practische Scala bezogen werden kann.

Nicht ohne erheblichen Grund schreiben wir daher die Musik genauer, als wir sie zur Zeit mit den Instrumenten vortragen können. Es erfordert diess nicht nur die nothwendige Uebereinstimmung der Schreibart mit der eingeführten Nomenclatur, sondern es ersetzt auch zum Theil die correcte Schrift dem Auge des Kenners, was der practischen Darstellung abgeht; sein Gefühl wird durch den Anblick der Noten unterstützt und der Klang gleichsam seinem Willen unterworfen. Deshalb empfindet auch der gebildete Musiker eine wahrhaft kunstreiche Musik nach vorausgegangenem Studiren derselben ungleich vollkommener, als der unvorbereitete, jenes Unterstützungsmittels entbehrende Zuhörer, dem daher die Begeisterung des Musikers nicht selten unerklärbar bleibt, obschon auch er das Wunderbare im Gange der Harmonie empfindet.

S i e b e n t e s C a p i t e l.

Von der Auflösung der Dissonanzen und der Ausweichung in andere Tonarten.

§. 109.

Wenn die Empfindung eines harmonischen Rhythmus in uns erregt und festgesetzt worden ist und wir uns längere Zeit hindurch seiner wohlgefälligen Einwirkung überlassen haben, so ist klar, dass eine plötzliche Veränderung desselben auf das Widrigste stören muss, wenn zwischen dem vorigen und dem neuen Rhythmus kein leicht fasslicher Zusammenhang Statt findet. Die Aufeinanderfolge der Accorde C F A c und C E G c oder die Auflösung des Pulsverbandes 12. 16. 20. 24 in 12. 15. 18. 24 kann nicht aufregend oder störend sein, weil in beiden Accorden Grundton und Octave die nämlichen sind, die beiden mittlern Töne aber zu diesen Grundtönen und ebenso unter einander selbst in beiden Accorden in einem leicht fasslichen Verhältniss stehen. Dagegen muss die Verwandlung des Accords

C	E	G	c	in	C $\sharp$	E $\sharp$	G $\sharp$	c $\sharp$
24	30	36	48		25	31 $\frac{1}{4}$	37 $\frac{1}{2}$	50

sehr auffällig sein. Hier findet eine plötzliche Verrückung aller einzelnen Pulsmengen Statt. Während das Ohr beim Accord C E G c in einer gewissen Zeit 24. 30. 36. 48 Pulse empfand, werden ihm durch den Accord C $\sharp$ E $\sharp$ G $\sharp$ c $\sharp$ in der nämlichen Zeit beziehendlich 25. 31 $\frac{1}{4}$. 37 $\frac{1}{2}$. 50 aufgedrungen. Obwohl nun beide Pulssysteme an sich selbst, einzeln genommen, vollkommen consoniren, so muss sich doch das Gefühl wegen der plötzlichen Verrückung gleichsam erst eine Zeit lang erholen, bevor es dieses neue Consoniren erkennen kann, indem es durch den ersten Accord in die Lage versetzt war, während jener Zeit bloss 24 Pulse vom Grundton zu erwarten. Es wird dem Gefühl schwer, die plötzliche Veränderung der Geschwindigkeit von 24 auf 25 rhythmisch zu fassen. Die erste Empfindung dauert noch eine kurze Zeit hindurch in der blossen Vorstellung fort und vermischt sich störend mit dem neuen äussern Eindrücke.

§. 110.

Die rhythmischen Systeme dürfen sich daher nur in leicht verständlichen Verhältnissen ändern, oder, mit andern Worten, es müssen die folgenden Harmonieen mit den vorhergegangenen stets in nicht zu entfernter Verwandtschaft stehen.

§. 111.

Auf diesem Grunde beruht die Regel, dass man auf angenehme Weise nur in verwandte Tonarten, d. h. in solche, welche die meisten Töne mit einander gemein haben, z. B. aus C in F oder G-Dur, aus C-Dur in A-Moll etc. ausweichen könne; ferner die Vorschrift, zwei nebeneinander liegende Quinten wie H F $\sharp$ und C G oder C G und D A oder Quartan wie C F, D G etc. nicht unmittelbar aufeinander folgen zu lassen, die Fortschreitung durch grosse Terzen wie E $\flat$ G, E G $\sharp$, F A etc. zu vermeiden, weil diese Quinten, Quartan und Terzen fremdartigen Harmonieen angehören. Selbst die Aufeinanderfolge von Octavgängen wird vom feinen Gefühl im strengen mehrstimmigen Satze nicht gut geheissen und zwar theils wegen der Einförmigkeit der Wirkung, theils aber auch mit aus vorhererwähnter Ursache. Es folgt übrigens hieraus zugleich, dass man verschiedenartige consonirende Accorde unmittelbar hintereinander folgen lassen könne, wenn die Töne der neuen Accorde entweder noch in der Tonleiter des vorigen Grundtons liegen oder die veränderten Töne des letztern als Vorhalte der neuen Töne des folgenden fremdartigen Accords erscheinen.

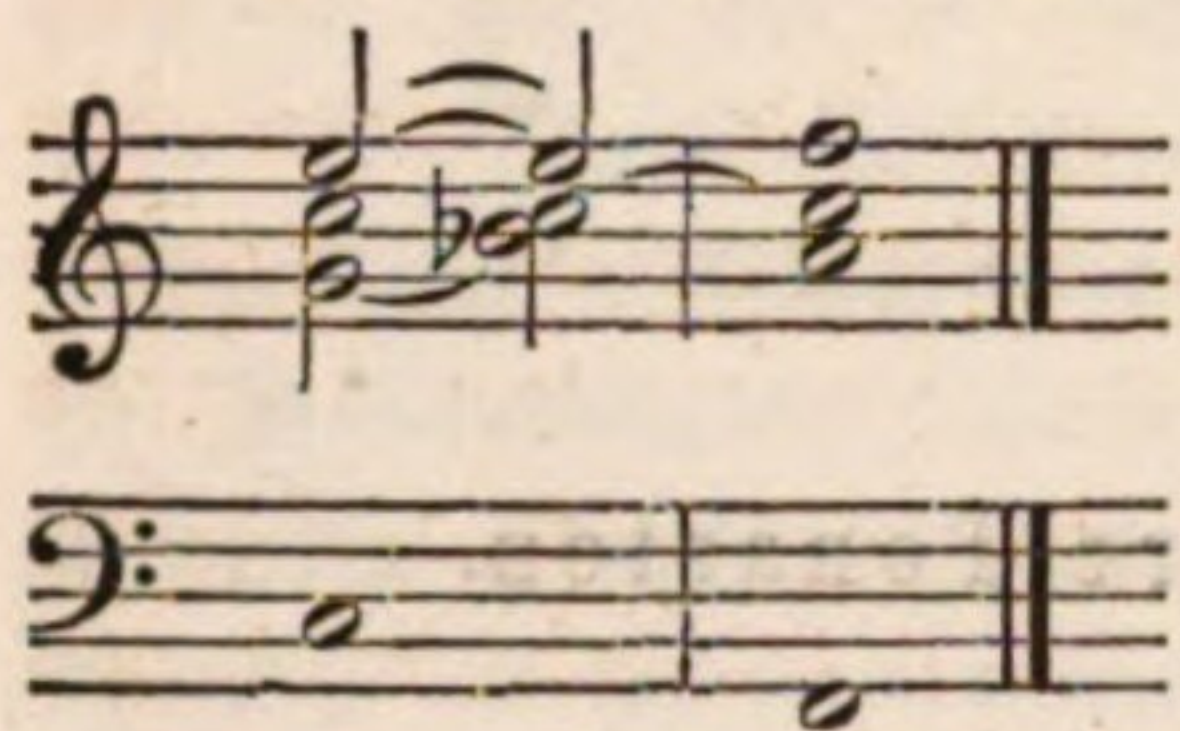
§. 112.

Das Störende eines dissonirenden Accords können wir uns nach §. 60 als die Wirkung des Streites zwischen dem uns inwohnenden Gefühlstacte und den, den Dissonanzen angehörigen unrhythmischen Klangpulsen vor-

vorstellen. Wir werden dann ferner annehmen dürfen, dass das Gefühl die störenden Pulse um so viel schneller oder langsamer verlangen werde, dass sie mit denjenigen zum nächstverwandten Accorde gehörigen wohlgefälligen Pulsen, welchen sie am nächsten kommen, völlig isochronisch werden, weil das Gefühl das Dissoniren eines Tones am stärksten in Bezug auf den ihm zunächst liegenden consonirenden Ton empfindet, oder mit andern Worten, die dissonirende Pulsgeschwindigkeit auf die nahe liegende consonirende Geschwindigkeit gleichsam schon hinweist. Liegt der aufzulösende Ton in der harmonischen Mitte (§. 48) zwischen zwei zum folgenden consonirenden Accord gehörigen Tönen, so muss es gleichgültig sein, ob er auf- oder abwärts steigt.

§. 113.

Hieraus erklärt sich, warum folgender Uebergang



so befriedigend und beruhigend ist. Durch die blosse Einführung des b entsteht im dissonirenden Accord, in welchem $\frac{e}{b}$ die Auflösung in $\frac{f}{a}$ aufs lebhafteste andeuten; e und b steigen und fallen daher beziehentlich in diese ihnen am nächsten liegenden consonirenden f und a , der bisherige Grundton c aber fällt zu Vervollständigung des neuen verwandten Accords in dessen Grundton F herab.

Diesen Uebergang hat auch schon längst das Gefühl als den einfachsten und vollkommensten aufgefunden und erkannt, und er ist auch in der That die Grundlage aller vollkommenen Ausweichungen überhaupt, indem sich alle Auflösungen auf diese Grundform zurückführen lassen.

§. 114.

Der vorige Uebergang besteht im Wesentlichen darin, dass man mittelst des Septimenaccords in die Quarte des Grundtons steigt. Die kleine Septime ist nämlich stets der Tonleiter des Grundtons fremd, gegentheils aber ein Bestandtheil der Tonleiter des neuen Grundtons und zwar die reine Quarte*) desselben, so dass dieser fremdartige Ton zugleich denjenigen Ton mit andeutet, auf welchen man bei einem zweiten gleichartigen Uebergange kommen würde.

Aus C geht man mit Hülfe von B in F über,

„ F „ „ „ „ „ „ Es in B „

„ B „ „ „ „ „ „ „ As in Es „ etc.

wo man die neuen Grundtöne stets mit den Hülftönen des vorigen Uebergangs übereinstimmend findet.

§. 115.

Im gleichschwebend temperirten System kommt man mit 12 solchen Ausweichungen wieder auf den ersten Grundton C . Nicht so die Natur. Diese geht aus C in die reine Quarte F über, welche um $1\frac{2}{3}$ tiefer liegt, als die gleichschwebend temperirte Quarte; beim folgenden Uebergang in ein B , welches um 2mal $1\frac{2}{3}$ tiefer liegt, als das temperirte B ; beim 3ten Uebergang in ein Es , welches um 3mal $1\frac{2}{3}$ tiefer liegt, als das temperirte Es etc. beim 12ten Uebergang in einen Ton, welcher um 12mal $1\frac{2}{3}$ oder um das pythagorische Comma 20 tiefer liegt als C .**) Hierauf beruht zuweilen das scheinbare Unterziehen der Sänger.

§. 116.

Der fortleitende Septimenaccord wird gewöhnlich als Septimen-Accord der Quinte desjenigen Tones betrachtet, in welchen er schliesst, und heisst dann insbesondere Dominanten-Accord. Der in F leitende Septimen-Accord ist also der Septimenaccord seiner Dominante c oder, wie oben, der Accord $C E G B$; für C ist es dessen Dominanten-Accord $G H d f$ etc. Einfacher scheint die Regel, dass jeder Septimenaccord in die Quarte des Grundtons führe. Dieser Septimenaccord kann nach Verschiedenheit der Umstände in verschiedenen Versetzungen vorkommen, z. B. der Accord $C E G B$ in den Versetzungen $E G B c$, $G B c e$, $B c e g$ und es können die Töne wieder in zerstreuter Harmonie liegen, einige doppelt vorkommen, andere fehlen. Alles diess ändert aber die Natur der Auflö-

*) Jener kl. Septimen-Accord besteht nämlich aus den Intervallen $\frac{5}{4}$, $\frac{3}{2}$ und $\frac{1}{2}$ oder aus Grundton, gr. Terz, Quinte und kleineren 7. (siehe §. 61) mithin aus den aufeinanderfolgenden Terzen $\frac{5}{4}$, $\frac{3}{2}$ und $\frac{1}{2}$.

**) Genauer genommen beträgt die Abweichung der temperirten Quarte . . 1,62916 . . Man darf also nicht folgern, dass die Natur von C ausgehend nach 600 reinen Ausweichungen oder Fortschreitungen in reinen Quartan mit dem letzten Uebergange wieder auf C gelangen werde, weil 600mal $1\frac{2}{3}$ den Werth 1000 oder den Raum der vollen Octave giebt. Es würde nämlich erst der 614te Uebergang dem 1sten Grundtone und zwar auch nur erst bis auf 0,00003 Octave wieder nahe kommen. Im strengen Sinne ist es unmöglich, durch solche reine Quartengänge jemals völlig genau auf eine reine Octave des ersten Grundtons zu kommen, weil keine ganze Potenz von $\frac{4}{3}$ einer ganzen Potenz der Zahl 2 jemals genau gleich werden kann. Ein neuer Beweiss von der unendlichen Menge gedenkbarer Töne und von der bewundernswürdigen Einrichtung der Natur, welche durch die aller-einfachsten Gesetze eine völlig unerschöpfliche Mannigfaltigkeit von Erscheinungen hervorbringt.

sung in der Hauptsache nicht im Mindesten und es gilt in allen Fällen das vorhin angedeutete Gesetz der Fortschreitung als Grundregel. Obwohl also jene Versetzungen des Septimenaccords beziehend Quintsextenaccord, Terzquartenaccord, Secundenaccord genannt werden, weil man die Bestandtheile jedes Accords auf dessen tiefsten Ton zu beziehen pflegt, so bedarf es doch für ihre Auflösung keiner besondern Regel.

§. 117.

Wie sich auch die anscheinend verwickeltsten Accorde jener Hauptregel unterordnen, werden wir am besten an dem verminderten Septimenaccorde zeigen können, weil er sehr verschiedener Beziehungen fähig ist. Wir betrachten ihn hier, wie er sich im gleichschwebenden 12stufigen Systeme gestaltet, weil diess die einfachste Uebersicht giebt, und Alles, was z. B. von dem Accorde $C\sharp E G B$ gesagt werden kann, auch für alle übrigen gilt. Die Eigenthümlichkeit dieses gleichstufigen Systems, in welchem die Octave genau in vier gleiche kleine Terzen von 250 zerlegt wird, gestattet nämlich, dass man in dem Accorde $C\sharp E G B$ jeden Ton beliebig zum untersten nehmen kann, indem, wenn man die übrigen vor ihm gelegenen Töne um eine Octave höher setzt, wieder neue Accorde von der nämlichen Beschaffenheit entstehen. So z. B. erlaubt jener Accord die Versetzungen $E G B c\sharp$, $G B c\sharp e$, $B c\sharp e g$, welche der Natur nach dem Accorde $C\sharp E G B$ völlig gleich sind, indem sie ihn nur in höhern Regionen darstellen.

Jeder dieser Accorde kann nun auf zweierlei Art in einen unverminderten temperirten Septimen- oder Leitaccord verwandelt werden. Letzter hat nämlich folgende Stufen

$333\frac{1}{3}$ 250 250 250 250 250
 C E G B der verminderte aber $C\sharp$ E G B.

Der Grundton C des Leitaccords ist um einen halben temperirten Ton oder um $83\frac{1}{3}$ erhöht und dadurch die erste Stufe des Leitaccords bis auf 250 vermindert worden. Um also den wahren Leitaccord aus dem verminderten wieder zu erzeugen, darf man nur entweder

1ster Fall, den Grundton wieder um einen solchen halben Ton erniedrigen, oder

2ter Fall, jeden der übrigen drei Töne um eben so viel erhöhen.

In diesem letztern Falle bewegen sich nämlich die Töne E G B gleichsam unverrückbar aneinander gebunden als ein unzertrennliches System gleichzeitig um $83\frac{1}{3}$ aufwärts, um aus der ersten Stufe 250 die zum wahren Leitaccord gehörige Stufe von $333\frac{1}{3}$ entstehen zu lassen, was zugleich die hierbei Statt findende Aufeinanderfolge vermindelter Quinten, welche für sich allein störend sein würde, erträglich und zulässig erscheinen lässt. Diess giebt schon acht verschiedene Arten von Auflösungen für diesen Accord. Folgende Uebersicht stellt sie einzeln dar, und es sind darin zugleich im verwandelten Accorde die Töne so benannt worden, wie es in Bezug auf die Natur desselben der eingeführten Bezeichnungsart gemäss ist.

Erster Fall.

$C\sharp E G B$	ist Vorhalt von	$C E G B$	und leitet in die Tonart	F
$E G B c\sharp$	„ „ „	$F\flat G B d\flat$	„ „ „ „ „	$A\flat$
$G B c\sharp e$	„ „ „	$F\sharp A\sharp c\sharp e$	„ „ „ „ „	H
$B c\sharp e g$	„ „ „	$A c\sharp e g$	„ „ „ „ „	D

Zweiter Fall.

$C\sharp E G B$	ist Vorhalt von	$C\sharp E\sharp G\sharp h$	und leitet in die Tonart	$F\sharp$
$E G B c\sharp$	„ „ „	$E G\sharp h d$	„ „ „ „ „	A
$G B c\sharp e$	„ „ „	$G H d f$	„ „ „ „ „	c
$B c\sharp e g$	„ „ „	$B d f a\flat$	„ „ „ „ „	$e\flat$

Dann kann man diesen Accord und seine Versetzungen auch noch als unmittelbare Vorhalte consonirender Accorde betrachten, z. B.

Dritter Fall.

$C\sharp E G B$	als Vorhalt von	$D\flat F A\flat$	oder der Tonart	$D\flat$
$E G B c\sharp$	„ „ „	$E G\sharp H$	„ „ „ „	E
$G B c\sharp e$	„ „ „	$G H d$	„ „ „ „	G
$B c\sharp e g$	„ „ „	$B d f$	„ „ „ „	B

indem man den 2ten Ton in die grosse Terz des Grundtons, den 3ten und 4ten aber in die Quinte desselben übergehen lässt, deren Vorhalte sie sind. Es leitet also der 3te Fall in die Töne des Accords $C\sharp E G B$ selbst, der 2te und 1ste Fall aber in die Töne des nächst tieferen und nächst höheren verminderten Septimen-Accords oder

in die Töne C D $\sharp$ F $\sharp$ A und D F A $\flat$ H, so dass man also mittelst des verminderten Septimen-Accords in alle Töne des Systems übergehen kann.

Ueber die bei diesen Verwandlungen Statt findenden kleinen Unvollkommenheiten sehe man §. 118.

§. 118.

Es ist bereits §. 51 vorgekommen, wie man die enharmonischen Intervalle, welche wir in Ermanglung der dazu nöthigen Töne auf Instrumenten mit fester Stimmung nicht darstellen können, durch künstliche Behandlung der Harmonie fühlbar macht, indem das Ohr gleichsam genöthiget wird, einen und den nämlichen Ton in zwei verschiedenen Accorden auch in verschiedener Höhe zu empfinden. Diess ist es, was man enharmonische Rückung nennt. Das Gefühl wird hierbei durch das Auge beim Anblick der Notenschrift unterstützt und der objective Klang der blossen Vorstellung innerhalb gewisser Grenzen untergeordnet.

Wir wollen jetzt den hierbei Statt findenden Vorgang etwas näher betrachten, um zu zeigen, dass zu dessen richtiger Darstellung selbst die systematischen Töne unsrer enharmonischen Tonleiter nicht ausreichen würden.

Wenn mittelst des verminderten Septimenaccords $\begin{matrix} C\sharp & E & G & B \\ 59 & 322 & 585 & 830 \end{matrix}$ in den Durdreiklang des systematischen H $\begin{matrix} C\sharp & E & F\sharp & A\sharp \\ 77 & 322 & 492 & 814 \end{matrix}$ übergegangen werden soll, so muss sich jener Accord in den natürlichen Leitaccord

Die Stufen dieses Leitaccords sind nämlich (nach §. 114 Anmerk.) $\frac{5}{4}$, $\frac{6}{5}$ und $\frac{3}{2}$ oder 322. 263. 245, und es müssen selbige für obiges H von dessen reiner Unterquarte oder von einem F $\sharp$ von 492 Höhe an gerechnet werden, was den Accord

$\begin{matrix} F\sharp & A\sharp & c\sharp & e \\ 492 & 814 & 1077 & 1322 \end{matrix}$ giebt, woraus durch Versetzung des c $\sharp$ und e in die nächst tiefere Octave der obige Leitaccord (77. 322. 492. 814.) entspringt. Die gleichnamigen Töne der enharmonischen Scala haben aber die Höhen 59. 322. 474. 796, woraus erhellet, dass die Darstellung dieses Uebergangs in unsrer Notenschrift



— wenn man die hier angegebenen Töne in der Höhe nehmen wollte, wie sie im enharmonischen System vorkommen —, dem natürlichen Vorgange nicht entspricht. Der letztere ist nämlich folgender:

Durch das blosse Aufsteigen des C in C $\sharp$ verwandelt sich der Accord C E G B in einen gleichsam völlig indifferenten (beziehungslosen) Accord C $\sharp$ E G B, welcher den Eindruck jenes Accords verlöscht, und die Freiheit gewährt, mittelst geringer Veränderungen aus ihm unmittelbar einen neuen bestimmenden Leitaccord zu bilden. Im vorliegenden Falle wird die Veränderung dadurch bedingt, dass der Ton G um den grossen halben Ton $\frac{1}{16}$ in die reine Unterquarte des folgenden Grundtons H herabsteigt. Indem diess nun geschieht, ordnen sich durch blosse enharmonische Rückungen die übrigen drei Töne dergestalt, dass sie mit jenem F $\sharp$, als der gegebenen Basis, einen neuen bestimmenden Leitaccord darstellen, und hierin liegt das Ueberraschende der enharmonischen Rückungen.

Es ist überflüssig, diesen Vorgang noch weiter zu erörtern, es kam nur darauf an, einen richtigen Begriff davon zu geben.

A c h t e s C a p i t e l .

V o m T a c t e , R h y t h m u s , Z e i t m a a s s e .

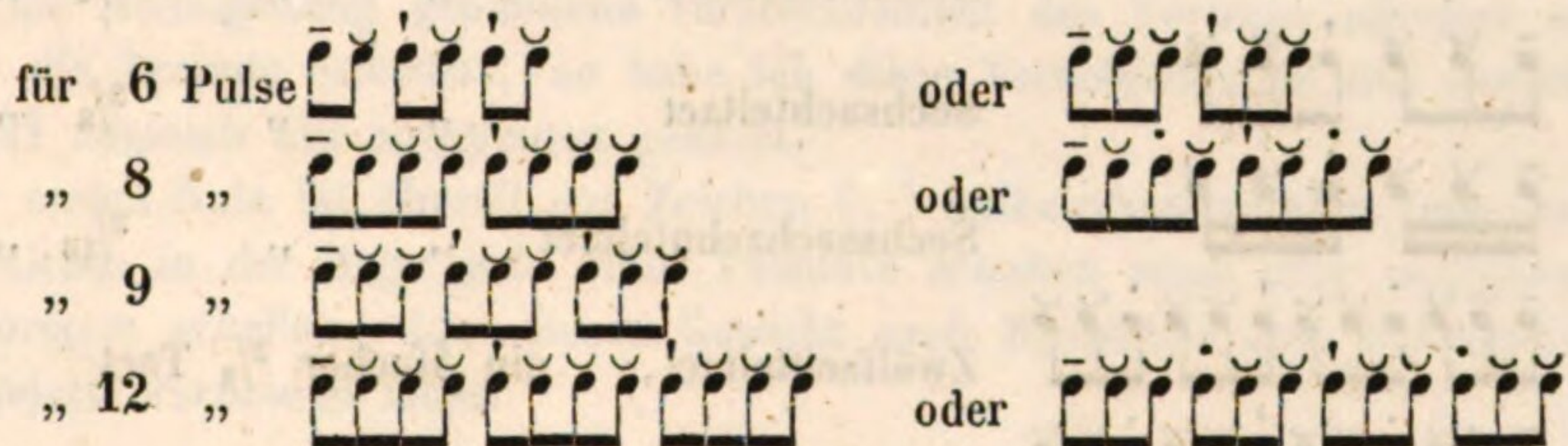
§. 119.

Wir haben bereits §. 54 fg. zu anderem Behuf entwickelt, wie die Aufeinanderfolge wahrnehmbarer Pulse nur dann wohlgefällig ist, wenn diese Pulse in einer regelmässigen, dem blossen Gefühl verständlichen Ordnung erscheinen oder mittelst der blossen Gefühlsmaasse 2. 3. 4 und höchstens 5 übersehen werden können. Diesem Gesetz gehorchen wir selbst beim Vortrage musikalischer Gedanken unwillkürlich, indem wir die Töne und Accorde in einem, dem blossen Gefühl verständlichen stetigen Zeitflusse dergestalt aufeinanderfolgen lassen, dass auch die anscheinend verschiedenartigsten Rückungen doch sämmtlich einem und demselben in gleichlange Zeiträume zerfallenden Hauptmaasse untergeordnet sind. Es erhellet leicht, wie das Gefühl zu diesen Haupt- oder Grundmaassen die §. 54 unter 2 und 4 entwickelten laufenden Rhythmen wählen musste, weil diese den stetigen Zeitfluss auf die leichteste Weise mittelst regelmässig geordneter Accente übersehen lassen. Man hat sich bis jetzt fast ausschliessend nur der aus den Zahlen 2. 3 und 4 entspringenden Abmessungen bedient, weil ein nach der Zahl 5 geordneter Zeitfluss sich schon zur Aufregung hinneigt und mehr der blossen Auffassung als der eignen Darstellung angehört. Obwohl wir diese Rhythmen bereits kennen gelernt haben, so wird es doch nicht überflüssig sein, sie hier nochmals kürzlich übersehen zu lassen; wir wollen dabei die Stärke der Accente in wachsender Ordnung wieder mit (˘) (˙) (˙) (˙) bezeichnen. Die Grundlage aller Abmessungen des stetigen Zeitflusses sind hiernach die Rhythmen



wo bloss ein schwerer Accent vorkommt. Soll die Einheit der Zeit in mehr als 4 gleiche Theile zerlegt werden, dann sind zur Verständlichkeit der Abtheilung mehrere schwere Accente erforderlich, deren Lage und Stärke aber wieder dem Gesetz des Rhythmus entsprechen muss. Schon eine Anzahl von 4 Pulsen pflegt das Gefühl meistens wieder dergestalt abzutheilen, dass es auf den 3ten Puls wieder einen besondern Accent legt, z. B.

Nothwendig aber wird eine solche Unterabtheilung, wenn die Einheit der Zeit in 6. 8. 9. 12 und mehr Pulse zerlegt werden soll. Die gebräuchlichsten Eintheilungen sind



worin die schweren Accente für sich wieder jene einfachen Rhythmen darstellen. Das Verlangen nach einer solchen wohlgefälligen und leicht verständlichen Abmessung ist in uns so gross, dass das Gefühl bei gleichförmig aufeinanderfolgenden Pulsen, welche eine solche Unterabtheilung nicht schon ansich bemerken lassen, die Abmessung durch blosser Vorstellung bewirkt (vergl. §. 68). Die Einheit der Zeit d. i. die Zeit, welche eine jede solche volle rhythmische Figur umfasst, nennen wir Tact, dessen Zeitdauer wieder im Allgemeinen durch das Tempo (Zeitmaass) bestimmt wird. Tact, Rhythmus und Zeitmaass sind also ihrer Bedeutung nach verschieden. Tact ist im engern Sinne nur die Abtheilung der Noten in gleichlange Zeiträume oder Schritte, nach Maassgabe des Rhythmus, welcher den Tact in kleinere gleiche Zeitheile (Tacttheile) wohlgefällig und leichtverständlich zerlegt; das Tempo aber bestimmt bloss die Geschwindigkeit der Bewegung oder die Zeitdauer der Tacte. Gewöhnlich pflegt man indess unter dem Worte Tact zugleich den Rhythmus mit zu begreifen, nach welchem er geordnet ist, man versteht dann unter Tact zugleich die volle rhythmische Figur selbst, welche der Tact einschliesst.

§. 120.

Nach der Verschiedenheit des Rhythmus oder der verschiedenen Anzahl der Tacttheile unterscheidet man

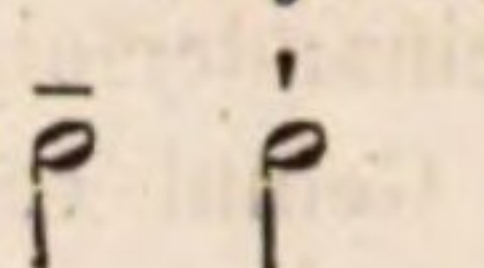
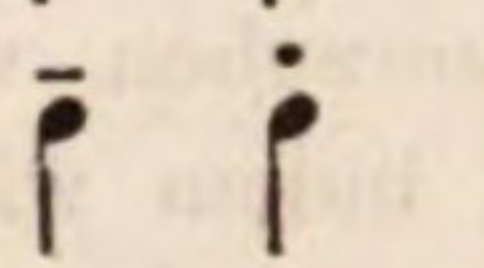
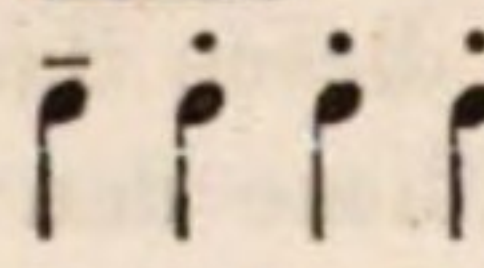
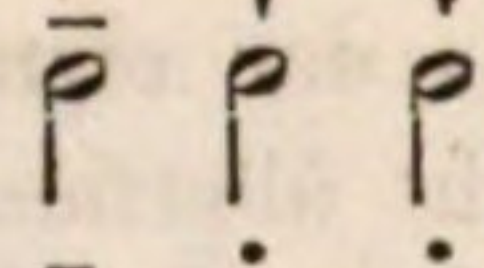
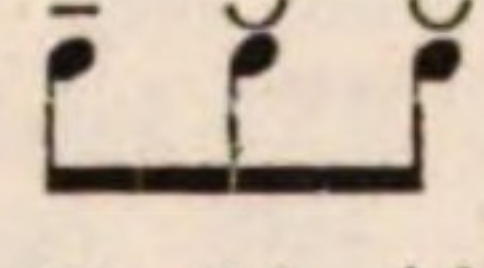
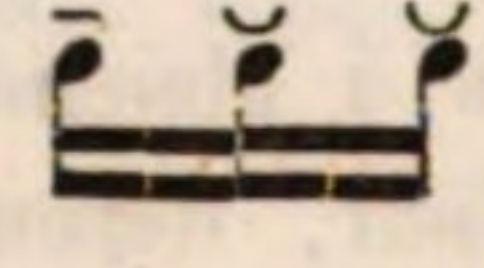
- 1) die gerade und ungerade Tactart, je nachdem nämlich die Anzahl der Tacttheile gerade oder ungerade ist;
- 2) einfache und zusammengesetzte Tactarten, je nachdem nur ein oder mehrere schwere Accente im Tacte oder Rhythmus vorkommen.

§. 121.

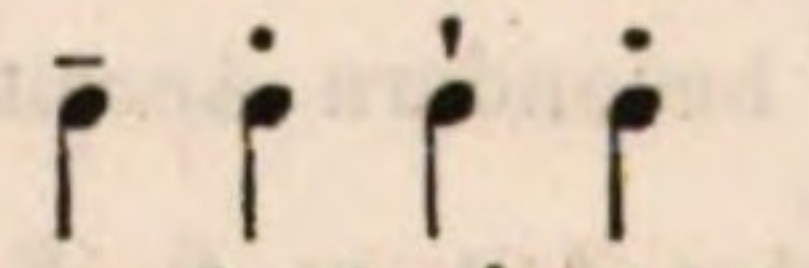
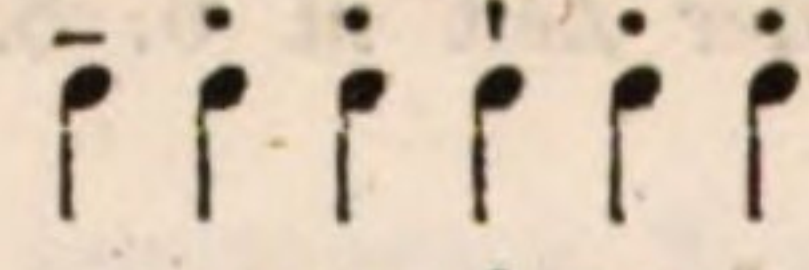
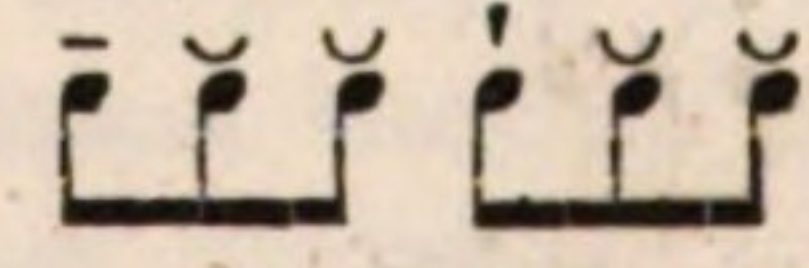
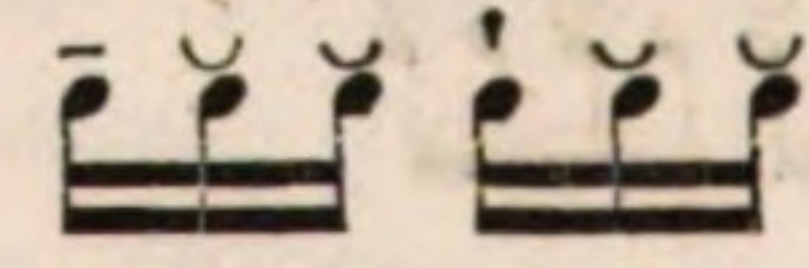
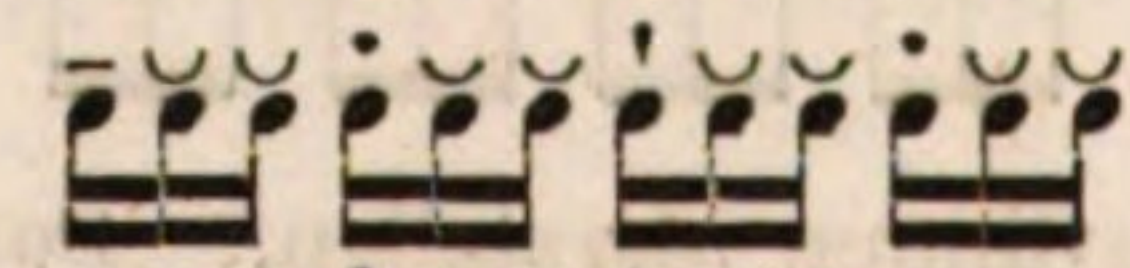
Tactarten und deren Bezeichnungen nebst Vorstellung ihres Rhythmus oder der Quantitäten der auf die Tacttheile kommenden Accente.

(Die Stärke der Accente ist wie im Vorigen bezeichnet.)

I. Einfache Tactarten.

Zeichen.	Rhythmus.	Name.	
C		Zwei-Zweitel-Tact, Alla breve,	gerade Tactarten.
$\frac{2}{4}$		Zwei-Viertel-Tact,	
$\frac{2}{8}$		Zwei-Achtel-Tact,	
$\frac{4}{4}$		Grosser Vier-Viertel-Tact,	
$\frac{4}{8}$		Vier-Achtel-Tact,	ungerade Tactarten.
$\frac{3}{2}$		Drei-Zweitel-Tact	
$\frac{3}{4}$		Drei-Viertel-Tact	
$\frac{3}{8}$		Drei-Achtel-Tact	
$\frac{3}{16}$		Drei-Sechzehntel-Tact	

II. Zusammengesetzte Tactarten.

C		Kleiner Vier-Viertel-Tact, ein doppelter $\frac{2}{4}$ Tact	gerade Tactarten.
$\frac{6}{4}$		Sechsvierteltact „ „ $\frac{3}{4}$ „	
$\frac{6}{8}$		Sechsaachteltact „ „ $\frac{3}{8}$ „	
$\frac{6}{16}$		Sechssechzehnteltact „ „ $\frac{3}{16}$ „	
$\frac{12}{8}$		Zwölfachteltact, ein 4facher $\frac{3}{8}$ Tact	ungerade Tactarten.
$\frac{12}{16}$		Zwölfsechzehnteltact „ „ $\frac{3}{16}$ „	
$\frac{9}{4}$		Neunvierteltact, ein triplirter $\frac{3}{4}$ Tact	
$\frac{9}{8}$		Neunachteltact „ „ $\frac{3}{8}$ „	
$\frac{9}{16}$		Neunsechzehnteltact „ „ $\frac{3}{16}$ „	

§. 122.

Nach dieser Uebersicht und der vorhergegangenen Erklärung über die natürliche Accentuirung der Tacttheile könnte es scheinen, als ob zu Bezeichnung der verschiedenen Rhythmen bloss die Zahlen 2. 3. 4 hinreichend wären, indem man die Rhythmen $\sim$, $\sim\sim$, $\sim\sim\sim$ beziehentlich durch die Zahlen 2. 3. 4. die Rhythmen $\sim\sim'$, $\sim\sim\sim'$ aber beziehentlich durch 2×2 , 2×3 etc. bezeichnen könnte. Erwägt man indess, dass die Tacte eines Tonstücks aus einer sehr verschiedenen Anzahl Noten bestehen können, und der Spieler nothwendigerweise sich gleich anfangs den Tact in so viel Hauptnoten zergliedert denken muss, als der Rhythmus Tacttheile anzeigt, um die übrigen kleineren und grösseren Noten nach diesen Hauptnoten abmessen zu können, so wird man schon hieraus die Nützlichkeit einer Bezeichnung erkennen, welche neben dem Character des Rhythmus zugleich auch die Gattung jener Hauptnoten mit andeutet. In der Bezeichnung $\frac{3}{4}$ ist dem Spieler durch den Zähler des Bruchs oder durch die Zahl 3 der Rhythmus $\sim\sim\sim$ angezeigt, aus dem Nenner aber ersieht er zugleich, dass auf

den einzelnen Tacttheil eine Viertelnote kommt, und er kann daher, sobald ihm das Zeitmaass (Tempo) gegeben ist, gleich beim ersten Anblick der Noten einer jeden derselben die richtige Zeitdauer beilegen, was nicht der Fall sein würde, wenn die Zahl 3 oder das Zeichen $\sim$ allein gegeben wäre, indem er dann erst aus der Anzahl und dem Werthe der Noten eines Tactes diejenige Note berechnen müsste, welche gerade $\frac{1}{3}$ des Tactes ausmacht. Ferner giebt es so viele Grade von Geschwindigkeiten, dass jedes Hülfsmittel, welches zu genauerer Bezeichnung des Zeitmaasses in der Musik dienen kann, nicht unbenutzt bleiben darf. Und ein solches Hülfsmittel ist in jener Bezeichnungsweise zugleich mit enthalten. Obwohl nämlich die Zeitdauer der längsten Note $\circ$ so wie der kürzesten f sehr verschieden sein kann, so hat diese Verschiedenheit doch ihre Grenzen und der Musiker kann innerhalb derselben schon aus der blossen Notengattung die Geschwindigkeit der Bewegung erkennen. Er wird in Folge dessen z. B. den Tact f f f , selbst im Zeitmaass „Prestissimo“ nicht so schnell und flüchtig nehmen als den Tact f f f , weil diess jenem allgemeinen Begriffe von der Geschwindigkeit und Dauer dieser Notengattungen widersprechen würde. Endlich liegt in dieser Bezeichnungsweise auch noch eine wesentliche Angabe für den Character des Tonstücks überhaupt. Obgleich nämlich in folgenden Beispielen



die Noten bei I, II und III gleich schnell genommen werden können, so wird der gute Spieler, ohne alle weitere Andeutung und bloss in Folge des Begriffs von der mittlern Zeitdauer dieser Noten, die Stelle I doch gewichtiger vortragen, als die Stellen II und III. Bei I werden die Töne den ganzen Tact auszufüllen, bei III die drei Tacttheile nur flüchtig anzudeuten scheinen.

§. 123.

Aus diesen Betrachtungen wird erhellen, dass es keineswegs einerlei ist, ob ein Tonstück im $\frac{3}{4}$ oder $\frac{3}{8}$ Tact etc. gesetzt sei, indem die Notengattung selbst schon, wegen der ihr im Allgemeinen zukommenden Zeitdauer, die Geschwindigkeit so wie die Schwere oder die Leichtigkeit des Vortrags bezeichnet. Ein voller gewichtiger Vortrag bei schnellem Tempo erfordert daher zu den Tacttheilen längere Noten, als ein flüchtiger Vortrag in gleichem Tempo.

Da diese an die Notengattung gebundene Verschiedenheit des Vortrags offenbar auch ein grösseres oder geringeres Gewicht für die Accente erfordert, so habe ich diese Verschiedenheit des Gewichts bei der Bezeichnung der Rhythmen in §. 121 zugleich mit anzudeuten gesucht.

Bloss auf der ersten Note ist überall das Zeichen (_) beibehalten worden, um damit das hervorstechende Gewicht anzudeuten, welches in der Regel jede erste Tactnote erhalten muss oder wenigstens in unsrer Vorstellung erhält; es wird aus Vorigem erhellen, dass dieses Gewicht nach Maassgabe der Notengattungen und der übrigen Accente ebenfalls verändert erscheinen muss.

§. 124.

Die gewichtvolleren Accente werden in der Musik schwer (gut), die schwächeren Accente leicht (schlecht) genannt, und man nennt daher auch die Tacttheile oder einzelnen Zeiten, auf welche sie fallen, beziehentlich schwere (gute) oder leichte (schlechte) Tactzeiten. Die in Parenthese eingeschlossenen Benennungen waren früher gebräuchlich, entsprechen aber dem Begriffe nicht so gut, als die in neuerer Zeit dafür gewählten Worte: schwer, leicht. Da man übrigens beim Angeben des Tactes mit der Hand den schweren Accent durch eine Bewegung derselben nach unten oder durch einen Niederstreich; den leichten Accent aber durch eine entgegengesetzte Bewegung (Aufstreich) anzugeben pflegt, so wird auch oft der schwere Tacttheil durch das Wort Niederstreich, der leichte durch das Wort Aufstreich bezeichnet.

§. 125.

Werden die Tacttheilnoten in kleinere oder kürzere Noten, Tactglieder, zerlegt, so findet bei ihrer Accentuirung das nämliche Gesetz Statt. Zerlegung in 2 Theile (Halbirung) erfordert im Allgemeinen den Rhythmus (_ $\sim$); Zerlegung in drei Theile (Triplirung) den Rhythmus (_ $\sim$ $\sim$).

§. 126.

Die bisher betrachteten Accente und zwar insbesondere die schwerern, werden grammatische Accente genannt, weil sie sich auf bestimmte Regeln gründen und nicht willkürlich sind. Ausserdem giebt es noch die sogenannten oratorischen und pathetischen Accente, welche an keinen bestimmten Tacttheil gebunden sind. Jene gehören zum richtigen, diese zum schönen Vortrag.

§. 127.

So wie schon in der ungebundenen Rede (Prosa) die einzelnen Sätze einer Periode, und die Perioden wieder als Theile der ganzen Rede einen wohlgeordneten Zusammenhang haben müssen, wenn der beabsichtigte Vortrag in einem ungestörten Flusse deutlich und verständlich erscheinen soll, um so viel mehr hat die Musik als blosse Gefühlssprache einen wohlgeordneten Periodenbau nöthig. Der Periodenbau in der Musik ist nach den verschiedenen Gattungen der Tonstücke sehr mannigfaltig und bewegt sich, wie im Gedicht und in der Rede, theils in strengeren, theils in freieren Formen; doch herrscht überall das Gesetz des Rhythmus, welcher die Anzahl der zu einer Periode und ihren kleineren Theilen nöthigen Tacte auf eine ähnliche Weise bestimmt, wie die Anzahl der Tacttheile im Tacte. Wie in der Rede, versteht man nämlich in der Musik unter dem Wort Periode einen solchen Theil des Ganzen, welcher einen Hauptgedanken darstellt oder einen vollständigen Sinn enthält, einen Satz, bei dessen Ende das Gefühl insoweit einen befriedigenden Ruhepunkt findet, dass es zur Verständlichkeit dieses Gedankens nichts mehr erwartet. Die Periode muss daher mit einer sogenannten Cadenz (Tonschluss) endigen, welche das Gefühl in eine, dem Orte und dem Inhalt der Periode entsprechende Ruhe zu versetzen geeignet ist. Diess geschieht allemal durch ein vorbereitetes Uebergehen in einen reinen Dreiklang. Die Art dieser Vorbereitung und die Natur des Grundtons im folgenden Dreiklang, je nachdem derselbe nämlich der Grundton des ganzen Stücks selbst oder nur ein ihm verwandter Ton ist, bestimmen den grössern oder geringern Grad der Ruhe einer Cadenz. Bei einer mittlern Periode ist die Vorbereitung gleichsam nur andeutend und die folgende Consonanz gehört nur einem verwandten Tone an; die Cadenz ist also zwar an sich beruhigend, doch nicht so völlig befriedigend, dass das Gefühl gar nichts mehr erwarten sollte. Bei der Schlussperiode muss dagegen diese Vorbereitung von der Art sein, dass das Gefühl das Ende der ganzen Darstellung vorhersieht, und die letzte oder die Schlusscadenz in den Grundton des Stücks verlangt.

§. 128.

Die kleineren Theile der Periode oder die Glieder des vorgestellten Gedankens nennt man in der Musik Einschnitte; sie sind hier das, was in der Sprache die kleineren sich gegenseitig erklärenden oder den Gedanken vervollständigenden Sätze sind. Jeder Einschnitt sondert sich daher vom folgenden ebenfalls durch einen bemerkbaren Ruhepunkt, welcher indess den Fluss des Vortrags ungefähr nur eben so wie das interpunctische Comma die Rede aufhält, etwas Folgendes also nothwendig erwarten und verlangen lässt. Ist der Einschnitt auch noch aus merklichen Theilen zusammengesetzt, so nennt man letztere Cäsuren.

§. 129.

Warum ein Tonstück eine solche Eintheilung in kleinere Glieder verlangt, wurde bereits vorhin angedeutet. Jedes Tonstück muss nämlich, als Werk der schönen Kunst, Mannigfaltigkeit in der Einheit zeigen und alle seine Theile müssen als Glieder eines Organismus einen so wohlübereinstimmenden und nothwendigen Zusammenhang haben, dass keines derselben ohne Störung daraus entfernt werden kann. Ein zweiter ebenfalls bereits angedeuteter Grund ist nächst dem der, dass Alles das, was das Gefühl durch das Gehör angenehm finden soll, rhythmisch und symmetrisch geordnet sein muss. Beide Forderungen entspringen daher aus den Gesetzen des Rhythmus.

Je vollkommener oder übersichtlicher die rhythmische Gliederung ist, desto leichter fasst sich das Ganze auf; je zusammengesetzter im Gegentheil der Rhythmus ist, desto grössere Aufmerksamkeit ist zum Verstehen des Vortrags nöthig. Folgendes Beispiel wird diess erläutern:



Jeder Musiker und Tänzer wird fühlen, dass diese Perioden weder um einen Tact vergrössert noch verkürzt werden können, ohne sogleich die angenehme Wirkung derselben zu stören. Jede dieser Perioden stellt gleichsam nur einen grössern ausgedehnten Tact dar, welcher nur in so viel Theile, hier einzelne Tacte, zerlegt werden kann, als das Gesetz des Rhythmus zulässt. Es würde also eben so wenig zulässig sein, Tanzmelodien in Perioden von 7, 11, 13 etc. Tacten zu setzen, als es dem blossen Gefühl möglich ist, einen Tact von 7, 11, 13 etc. Theilen leicht aufzufassen. So wie nämlich die einzelnen Tacttheile vom Gefühl accentuirt werden, so misst das Gefühl auf ähnliche Weise auch die Anzahl der Tacte einer Periode oder eines Einschnittes. Wie man aus obigen Beispielen ersieht, erhält jeder Tact als Theil einer Periode wieder einen besonderen Accent, was bei Tänzen am deutlichsten gefühlt wird, weil hier die einfachste rhythmische Gliederung Statt findet.

§. 130.

Nächst den Tanzmelodien haben die Lieder mit immer gleichen wiederkehrenden Strophen, wo nämlich auch die Einschnitte gleichgelegener Verse in jeder Strophe auf einerlei Stelle fallen, die einfachste rhythmische Einrichtung, welche durch die Versart des Gedichts bestimmt wird. Grössere Tonstücke, Sonaten, Sinfonien etc. sind zwar ebenfalls dieser rhythmischen Gliederung unterworfen, damit das Gefühl sich des Anfangs jeder Stelle und des Zusammenhangs aller ihrer Theile nach Melodie und Rhythmus noch bei ihrem Schlusse sich zu erinnern vermag. Begreiflich ist indess hierbei eine grosse Freiheit nach Maassgabe der wechselnden Affecte gestattet, und ein weniger leicht zu fassender Rhythmus (rhythmische Rückungen | $\overset{\frown}{\text{f}}\overset{\frown}{\text{f}}$ | $\overset{\frown}{\text{f}}\overset{\frown}{\text{f}}$ |, die Syncopen $\overset{\frown}{\text{f}}\overset{\frown}{\text{f}}\overset{\frown}{\text{f}}\overset{\frown}{\text{f}}$ | $\overset{\frown}{\text{f}}\overset{\frown}{\text{f}}\overset{\frown}{\text{f}}\overset{\frown}{\text{f}}$ |, etc.) so wie die rhythmuswidrige Verbindung zweier Einschnitte oder Perioden durch Uebergehung oder Vermeidung der ange deuteten Cadenz (Tacterstickung genannt) können oft dazu dienen, um das Gefühl schicklich aufzuregen und zu einer besondern Aufmerksamkeit für das Folgende anzureizen. Solche aufregende Rhythmen im Tacte so wie überhaupt in irgend einem grössern Theile eines Tonstücks haben für das Gefühl eine ähnliche Wirkung, wie die aus gleicher Ursache entspringenden unvollkommenen Consonanzen und Dissonanzen im Gebiete des Klanges für unser Gehör.

§. 131.

Der gerade und ungerade (dreigliederige) Tactrhythmus sind nach §. 121 und §. 56 nichts anderes, als die in einer sehr tiefen, zählbaren Region erscheinende ruhige Octave und lebenvolle Quinte. Die nächstfolgende Consonanz oder die Quarte ist bloss das Octavcomplement der Quinte und folglich auch ihr Rhythmus (§. 59) vom Quintrhythmus nicht wesentlich verschieden. Beide Rhythmen gehören dem dreitheiligen Tacte an. Den nächstfolgenden neuen Rhythmus finden wir also erst in der grossen Terz und ihrem Octavcomplement, der kleinen Sexte, welche in der zählbaren Region als ein fünfteiliger Tact erscheinen. Die Natur scheint uns also für die weniger angenehmen zur Aufregung sich hinneigenden Affecte auf die Anwendung des fünfteiligen Tactes hinzuweisen. In der That hat man auch in der Musik den fünfteiligen Tact schon mehrmals zu benutzen gesucht. Es ist indess nicht so leicht, ihn in gehörigem Flusse und so auszuüben, dass er — wie solches allerdings ausführbar — das Angenehme mit der seiner Natur entsprechenden Annäherung zur Aufregung vollkommen verbinde.

Ueberhaupt ist hierbei zu beachten, dass der Tactrhythmus in der Regel eine längere Zeit hindurch herrschend bleibt, ein weniger fasslicher Rhythmus also nur dann als Tact zu gebrauchen sein wird, wenn eine stetige Aufregung unterhalten werden soll, was nur in seltenern Fällen und auch dann nur auf kurze Zeit, gleichsam nur im Vorübergehen zulässig erscheint.

Aus gleichem Grunde würde es übrigens nicht als unstatthaft anzusehen sein, für besonders aufregende Momente die Musik selbst in 7theiligen Tacten eine kurze Zeit hindurch fortschreiten zu lassen.

Neuntes Capitel.

Allgemeine Wiederholung, als Uebersicht des Ganzen.

§. 132.

Die Theorie der Musik gründet sich auf sehr einfache Gesetze und würde sich weit kürzer haben fassen lassen, wenn es nicht nöthig gewesen wäre, sie in steter Verbindung und Beziehung mit dem Bekannten zu erhalten, um an Deutlichkeit zu gewinnen. Wir wollen daher jene Gesetze nochmals kürzlich ins Auge fassen, um eine möglichst gedrängte Uebersicht des Ganzen zu erhalten.

1. Die Töne entstehen aus schnellen, pendelartig aufeinanderfolgenden Schwingungspulsen elastischer Körper; die Intensität der Pulse bedingt die Stärke, ihre Geschwindigkeit die Höhe des Tons. (§. 5.)

2. Das Con- oder Dissoniren der Tonverbindungen entsteht aus dem wohlgefälligen oder störenden Rhythmus, welcher von den gleichzeitig erscheinenden Klangpulsen gebildet wird. Der Rhythmus ist um so einfacher, je leichter sich die zum rhythmischen Schlusse gehörigen Pulse vom blossen Gefühl abmessen lassen. Das einfachste und ruhigste Gefühlsmaass ist die Zahl 2, mit ihren Verdoppelungen; dann folgen an Wohlgefälligkeit und Fasslichkeit immer mehr abnehmend die Zahlen 3. 5. 7, welche letztere schon störend wirkt. (§. 56 flg.)

3. Isochronische Pulsreihen geben den Einklang, die Monotonie $\frac{1}{1}$, wo kein Unterschied wahrgenommen wird.

4. Alle Verdoppelungen der Geschwindigkeit führen wieder auf den der einfachen Geschwindigkeit angehörigen Ton und versetzen ihn nur in schnellere oder höhere Regionen.

5. Grundton und Octave oder die Geschwindigkeiten 1 und 2 sind daher die Grenzen des wesentlichen Tongebiets und alle wesentlich verschiedenen Intervalle zwischen den Exponenten 1 und 2 eingeschlossen. Jeder Ton ist folglich auch gleichzeitig der Beziehung auf beide Endpunkte, auf Grundton und Octave unterworfen.

6. Der wesentliche Unterschied der Töne wächst daher von der Geschwindigkeit 1 bis $\sqrt{2}$, von wo er wieder in gleicher Maasse umgekehrt gegen den der Geschwindigkeit 2 angehörigen Ton abnimmt. Der Ton $\sqrt{2}$ ist in Bezug auf die Tonica und Octave wegen seines irrationalen Verhältnisses zu den Zahlen 1 und 2 völlig bedeutungslos, und bildet den symmetrischen Mittelpunkt des Tongebiets. Gleichen Abständen von dieser Mitte (oder den Geschwindigkeiten $\sqrt{2} \pm x$) kommen gleiche Wirkungen in Bezug auf den betreffenden (auf gleicher Seite gelegenen) Endpunkt des Systems zu.

7. Aus den zwischen 1 und $\sqrt{2}$ liegenden einfachen Verhältnissen bestimmen sich also sämtliche einfachen Verhältnisse des Tongebiets überhaupt, indem man sie diesseits auf die Zahl 1 und jenseits auf die Zahl 2 bezieht. So weit solche nach den Zahlen 2. 3. 5. 7 abmessbar sind, wird man folglich haben.

$$\sqrt{2} \left\{ \begin{array}{l} \frac{7}{5}, \frac{4}{3}, \frac{9}{7}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \frac{7}{6}, \frac{8}{7}, \frac{9}{8}, \frac{10}{9}, \frac{15}{14}, \frac{16}{15} \text{ in Bezug auf 1} \\ \frac{10}{7}, \frac{3}{2}, \frac{14}{9}, \frac{8}{5}, \frac{5}{3}, \frac{12}{7}, \frac{7}{4}, \frac{16}{9}, \frac{9}{5}, \frac{28}{15}, \frac{15}{8} \text{ in Bezug auf 2} \end{array} \right.$$

Diese Reihe würde also die einfachsten Tonverhältnisse oder Intervalle in der Octave darstellen; die Logarithmen und die Lage der diesen Verhältnissen entsprechenden Töne zeigt das Tableau §. 61.

8. Jedem Tone ohne alle Ausnahme kommen diese, so wie alle übrigen gedenkbaren Intervalle (§. 42 und §. 79) zu; die Gesetze der Harmonie sind also für jeden Ton die nämlichen. Kein Ton kann eine andere naturgemässe Tonleiter haben als der andere Ton; aller Unterschied beschränkt sich ausschliessend auf die blosse Verschiedenheit der Höhe des Grundtons.

9. Alle Consonanzen mit Einschluss der 7theiligen Rhythmen werden durch den einzigen Pulsverband 4. 5. 6. 7. 8, oder durch den Stammaccord C E G K c auf einmal dargestellt. Dieser Accord ist daher die Basis aller Harmonie. (§. 63.)

10. Da das Gefühl nach Maassgabe der Verschiedenheit des Affects und des Stimmorgans sich durch Melodien in verschiedenen Regionen äussert, so müssen folgende zwei Forderungen die Grundlage des practischen Tonsystems bilden:

- a) Es müssen so viele Töne innerhalb der Octave vorhanden sein, als das Gehör deutlich zu unterscheiden, das Instrument und Organ sicher und leicht darzustellen vermag, damit dem Gefühl die Wahl des Grundtons freistehe; es muss jedoch zugleich
- b) jeder derselben mit Hülfe der übrigen Töne des Systems diejenigen Intervalle bilden können, welche der Stammaccord 4. 5. 6. 7. 8 oder wenigstens der Stammaccord 4. 5. 6. 8 als Grundlage der Harmonie darstellt.

11. Die erste Bedingung (10.a) wird nun von selbst und desto vollständiger erfüllt, je mehr man der andern (10.b) zu genügen sucht. Die ganze Aufgabe, ein möglichst vollständiges Tonsystem für die Praxis zu erfinden, reducirt sich also einzig und allein auf die Erfüllung dieser zweiten Bedingung. Dieser letzteren vollkommen zu genügen, ist aber unmöglich, indem diess voraussetzt, dass alle Töne gleichweit von einander abstehen, was ohne Abweichung von der natürlichen Reinheit der Stamm-Intervalle nicht erreichbar ist, weil diese Intervalle kein so 'grosses gemeinschaftliches Maass haben, um sie sämtlich mit einer, dem leichten practischen Gebrauch entsprechenden kleinen Anzahl gleicher Stufen genau darstellen zu können. §. 83 und §. 88.

12. Es ist also keine practisch anwendbare Tonleiter möglich, welche jedem der in ihr enthaltenen Töne die naturgemäss reinen einfachsten Intervalle gewährte. Wir müssen uns daher, wegen der nothwendig im Auge zu behaltenden Bedingungen (10.b) eines künstlichen Systems bedienen, welches dieser Bedingung innerhalb der zulässigen Abweichungsgrenze so nahe als möglich entspricht.

13. Das kleinste System dieser Art — worin nämlich auch die 7theiligen Rhythmen oder die aus der Mitaufnahme des Tones K entspringenden Intervalle vorhanden wären — würde das 31stufige gleichschwebend temperirte System sein. Da solches indess wegen der Menge der Töne zu grosse Schwierigkeiten in der Auffassung sowohl, als in der Darstellung haben würde, so müssen wir uns der aus der Zahl 7 entspringenden Intervalle bedienen und uns mit den, nach den Zahlen 2. 3. 5 abmessbaren Verhältnissen begnügen. Diese sind

$$\frac{16}{15}, \frac{10}{9}, \frac{9}{8}, \frac{6}{5}, \frac{5}{4}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{8}{5}, \frac{5}{3}, \frac{16}{9}, \frac{9}{5}, \frac{15}{8}$$

und bilden unsre theoretische Dur- und Moll-Tonleiter. (s. §. 62.)

14. Diese Tonleiter nun endlich für jeden Ton einer mässig grossen Scala möglichst genau darzustellen, giebt es bloss die Eintheilung der Octave in 19 oder 12 gleiche Stufen. Letztere ist unsere practische Scala, und zeigt, wie wir die Musik spielen, erstere (s. §. 108) wie wir sie schreiben.

15. Alle consonirenden Accorde entspringen ausschliesslich aus den beiden rhythmischen Pulsverbindungen

4. 5. 6. 8 und 10. 12. 15. 20 (§. 96). Der ersten (dem Dur-Vierklang) liegt das wohlgefällige ruhige Gefühlsmaass 4, der andern (dem Moll-Vierklang) das weniger fassliche Maass 5 zum Grunde. (§. 96.)

16. Dieselben Pulsreihen, welche im Gebiete des Klanges als Consonanzen erscheinen, bilden im Gebiet des Zählbaren in völlig analogem Grade den angenehmen musikalischen Tact, überhaupt die rhythmische Gliederung jedes Tonwerks. (§. 131.)

Wie also die Schönheit des einzelnen Klanges auf der vollkommenen Reinheit und Regelmässigkeit der ihn bildenden Klangwellen beruht; wie die Töne der einfachen Tonleiter rhythmisch geordnet sind, so beherrscht der Rhythmus auch alle übrigen Elemente und Ordnungen eines musikalischen Kunstwerks. Rhythmische Klangwellenpulse erzeugen die Harmonie der Töne, rhythmisch aufeinanderfolgende Töne und Accorde den wohlgefälligen und nothwendigen musikalischen Tact, rhythmisch geordnete Tacte die angenehme Periode etc. und aus gestörtem Rhythmus entspringt die Dissonanz, der aufregende Tact, überhaupt beunruhigende Musik. Wo, wie beim heitern Tanz, Melodie und Bewegung nur den angenehmen, lebenvollen Rhythmen angehören, da wird das Gefühl bis zum Entzücken freudig erregt; wo aber im geraden Gegentheil der Klang-, Tact- und Perioden-Rhythmus nur in schwer fasslichen Formen erscheint, wo die Dissonanzen herrschen und in aufregender Bewegung einherschreiten, da flieht die Freude und das auf so vielfache Weise bestürmte Gefühl kann bis zur höchsten Unruhe und Erschütterung gebracht werden.

Verkennen wir endlich hierbei nicht, dass der Enthusiasmus, welchen einzelne vorzüglich beliebt gewordene Volksmelodien hervorzurufen pflegen, durchaus nicht der Musik allein, sondern, und zwar oft zum grössern Theil andern Nebenideen beizumessen ist, welche das Anhören einer solchen Musik augenblicklich wieder hervorruft, Fälle, wo der gewohnten Melodie, wie den Sprachlauten, nach und nach eine bestimmte Bedeutung beigelegt wird; dass ferner auch das vortrefflichste Tonstück seinen Zauber fast gänzlich verliert, wenn es unrein gespielt wird, ja selbst ein einzelner unreiner Ton diesen Zauber auf längere Zeit hin zerstören kann, gegentheils aber die Aufeinanderfolge weniger Accorde oder harmonirender Töne in ihrer vollkommensten Reinheit dargestellt, eine ausserordentliche Wirkung hervorzubringen im Stande sind; so finden wir uns auf das höchst merkwürdige Ergebniss geführt

dass die Musik an sich, vom einzelnen Klange an bis zum vollendetsten Tongebäude, einzig auf dem Rhythmus in der Klangwellenbewegung beruht.

Eine so wunderbar mannichfaltige Wirkung aus so höchst einfacher Ursache ist wohl auch ganz der unendlichen Vollkommenheit der Naturgesetze entsprechend.

Darf man annehmen, dass, wie es in der That dem dermaligen Stande der Wissenschaft am besten zu entsprechen scheint, auch die Fortpflanzung des Lichts nur in Vibrationen eines feinen Aethers ihren Grund habe, so wird man, da die Lichtwellen denselben Bewegungsgesetzen wie die Schallwellen unterworfen sein würden, unwillkürlich zu der Frage gedrängt, ob nicht unsere Sinne auch noch den Rhythmus in der Aufeinanderfolge der Lichtwellenpulse wahrzunehmen im Stande sein möchten, und ob man nicht die wohlgefälligen Farben als die diesen schnelleren Rhythmen angehörigen Erscheinungen anzusehen habe. Da man sich jedoch sehr zu hüten hat, in solchen Analogien von vorn herein zu weit zu gehen, so kann diese Frage zur Zeit nur als Stoff zu weiterer Forschung, und dasjenige, was sich uns über die Wirkung des Rhythmus im Gebiete des Zählbaren und des Klanges zu erkennen giebt, nur als eine bedeutsame Aufforderung hierzu angesehen werden.

Es scheint allerdings, dass dem Rhythmus im Gebiete des Schönen überhaupt ein sehr weiter Wirkungskreis angewiesen sei.

Anhang.

I. Metronom, Tactmesser.

§. 134.

Obwohl das Tempo oder Zeitmaass, in welchem ein Tonstück vorgetragen werden soll, dem Musiker theils schon durch die Notengattung des Stücks, noch mehr aber durch besondere Kunstworte: allegro, andante, adagio etc. bezeichnet wird, so war es doch wünschenswerth, noch eine genauere Angabe für das Zeitmaass zu haben, und diess veranlasste die Erfindung der sogenannten Tactmesser, von welchen das von *Mälzel* in Wien angegebene Metronom in der neuesten Zeit am meisten in Gebrauch gekommen ist. Es hat solches eine Scala, auf welcher die Zahlen 50. 52. 54. 56 u. s. w. bis 160 vorkommen und so construirt ist, dass es, auf irgend eine solche Zahl gerichtet, in 1 Minute gerade diese Anzahl Schläge giebt. Wenn also über einem Tonstücke angegeben ist „♩ = 60 Mälz. Metron.“ so bedeutet diess zugleich, dass die Zeitdauer einer Viertelnote = $\frac{1}{60}$ Minute sein soll u. s. w. Es ist zu wünschen, dass diese zweckmässige Bezeichnung des Zeitmaasses beibehalten und allgemein eingeführt werden möge, weniger aber nöthig, sich desshalb eines künstlichen Metronoms zu bedienen, indem für diesen Zweck schon ein blosses Fadenpendel hinreicht, was auch schon längst von Dr. *Gfr. Weber* dazu vorgeschlagen worden ist.

Wenn nämlich die Länge des einfachen Secundenpendels zu ~~160~~ ¹⁰⁰ gleichen Theilen angenommen wird, so kommen den *Mälzel'schen* Zahlen oder Graden folgende Pendellängen zu:

Grade.	Pendell.	Grade.	Pendell.	Grade.	Pendell.	Grade.	Pendell.
50	144	66	83	92	42	120	25
52	133	69	76	96	39	126	23
54	123	72	69	100	36	132	21
56	115	76	62	104	33	138	19
58	107	80	56	108	31	144	17
60	100	84	51	112	29	152	15½
63	91	88	46	116	27	160	14

Man findet diese Pendellängen sehr leicht, indem man die Quadrate der Zahlen 50, 52, 54 etc. berechnet, und mit jedem derselben in die Zahl 360000 dividirt *).

Es bedarf also nur folgender einfachen Vorrichtung zu einem völlig brauchbaren und ausreichenden Tactmesser. Man messe auf einem Stabe Fig. 18 von a bis b die Länge des einfachen Secundenpendels ab (welche Länge für diesen Zweck überall in runder Zahl zu 440 pariser Linien oder 38 Rheinl. Zoll angenommen werden kann), theile diese Länge von a nach b zu in 100 gleiche Theile und schreibe dann nach Maassgabe obiger Tabelle an die Theilstriche 14, 15½, 17, 19 etc. beziehendlich die zugehörigen *Mälzel'schen* Grade 160, 152, 144, 138 etc. Zieht man hierauf einen mit einer Flintenkugel beschwerten Faden durch ein, in das Querstück c gebohrtes enges Oehr, welches den Faden nur eben durchgehen lässt, und stellt man dann mittelst des Klemmstiftes d die Kugel so, dass ihre Mitte genau dem Theilstriche gegenüber zu stehen kommt, welcher den verlangten Grad oder die angegebene Menge Schläge in 1 Minute anzeigt, so wird die in Schwung gesetzte Kugel das verlangte Zeitmaass so genau

*) Die Längen der Pendel r, R etc. verhalten sich nämlich umgekehrt, wie die Quadrate der in gleichen Zeiten von ihnen gemachten Schwingungen s, S etc. d. h. $r : R = \frac{1}{s^2} : \frac{1}{S^2}$ oder überhaupt wie $\frac{x}{s^2} : \frac{x}{S^2}$. Man findet also die Verhältnisse der Pendellängen für gegebene Schwingungsmengen, wenn man mit den Quadraten der letztern in eine beliebig angenommene Zahl dividirt. Oben ist die Zahl 360000 als Divident deshalb gewählt worden, um bei Division mit dem Quadrat von 60 den Quotienten 100 zu erhalten.

angeben, als es nur immer nöthig ist. Für die verschiedenen Tactarten und Geschwindigkeiten der Bewegung sind nach *Mälzel's* Angabe folgende Bezeichnungen geeignet.

Im Tacte.	für langsames,	gemässigt,	geschwindes Tempo.
$C, C, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{6}{8}, \frac{9}{8}, \frac{12}{8}, \frac{3}{8}$	$\text{♩} = 50 \text{ bis } 110.$	$\text{♩} = 60 \text{ bis } 100.$	$\text{♩} = 60-150. \quad \text{♩} = 80-100$
	$\text{♩} = 50 - 110.$	$\text{♩} = 60 - 140.$	$\text{♩} = 50-110$
	$\text{♩} = 50 - 140.$	$\text{♩} = 50 - 100.$	$\text{♩} = 110-150. \quad \text{♩} = 80-120$
		$\text{♩} = 50 - 140.$	$\text{♩} = 50-120.$

Wie nothwendig eine solche genauere Angabe des Zeitmaasses ist, kann man aus *Hummel's* theoretisch-practischer Anweisung zum Pianofortespiel (Wien, bei Hasslinger 1828) ansehen, in welcher auf Seite 441 eine Tabelle vorkommt, worin die wahren Zeitmaasse der mit einerlei Kunstwort, (Tempobezeichnung) überschriebenen und in einerlei Tactart gesetzten Tonstücke eines und desselben oder auch verschiedener Componisten in *Mälzel's*chen Graden angegeben sind.

II. Nähere Erläuterung der Flageolet-Töne oder der sogenannten Sons harmoniques.

§. 135.

Es ist bereits §. 27 gezeigt worden, dass, wenn die beiden Theile der Saite, in welche sie durch leise (harmonische) Berührung mit dem Finger zerlegt wurde, sich in kleinsten ganzen Zahlen wie m zu n verhalten, der tonbestimmende Theil $= \frac{1}{m+n}$ von der ganzen schwingenden Saite ist. erinnert sich nun der Leser aus §. 48 dass, wenn die ganze Länge der Saite $= 1$ gesetzt wird:

die Länge $\frac{1}{2}$ die Octave des Grundtons der Saite,
 „ „ $\frac{1}{3}$ die Octave der Quinte,
 „ „ $\frac{1}{4}$ die 2te Octave des Grundtons,
 „ „ $\frac{1}{5}$ die 2te Octave der grossen Terz etc.

gibt, so wird er folgende Vorstellung von der Erzeugung der Sons harmoniques vollkommen begreifen können.

	Wenn man nämlich harmonisch greift	so liegt von der ganzen Saite zwi- schen dem Finger und dem Stege		der tonbe- stimmen- de Theil ist dann	und der Flageolet-Ton muss sein:	Z. B. bei der Saite c der Ton:
		und dem Stege	und dem Sattel			
1	den kleinen Ton	$\frac{9}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	die 3. 8^{va} der gr. Terz	$\equiv e$
2	„ grossen Ton	$\frac{8}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	„ 3. 8^{va} „ Secunde	$\equiv d$
3	„ grössten Ton	$\frac{7}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	„ 3. 8^{va} „ Grundtons	$\equiv c$
4	die kleinste Terz	$\frac{6}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	„ 2. 8^{va} „ kleinsten 7.	$\equiv k$
5	„ kleine Terz	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	„ 2. 8^{va} „ Quinte	$\equiv g$
6	„ grosse Terz	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	„ 2. 8^{va} „ gr. Terz	$\equiv e$
7	„ Quarte	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	„ 2. 8^{va} des Grundtons	$\equiv c$
8	„ Quinte	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	„ Octave der Quinte	$\equiv g$
9	„ kleine Sexte	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	„ 3. 8^{va} des Grundtons	$\equiv c$
10	„ grosse Sexte	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	„ 2. 8^{va} der gr. Terz	$\equiv e$
11	„ grösste Sexte	$\frac{7}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$	„ 3. 8^{va} „ Quinte	$\equiv g$
12	„ kleinste Septime	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{7}$	„ 2. 8^{va} „ kleinsten 7.	$\equiv k$
13	„ kleinere Septime	$\frac{9}{16}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{1}{16}$	„ 4. 8^{va} des Grundtons	$\equiv c$
14	„ kleine 7te	$\frac{5}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	„ 3. 8^{va} der Secunde	$\equiv d$
15	„ grosse 7te	$\frac{8}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{15}$	„ 3. 8^{va} „ gr. 7.	$\equiv h$
16	„ Octave	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	die Octave	$\equiv c$

§. 136.

Da der Flageolet-Ton nur von aliquoten Theilen der schwingenden Saite erzeugt werden kann, so sieht man, dass bei blosser einmaliger Abtheilung einer Saite keine andern Flageolet-Töne hervorgebracht werden können, als die §. 48 angedeuteten Intervalle. Wenn man sich nun von irgend einem aliquoten Theile der Saite, z. B. von $\frac{1}{m}$, das Doppelte, 4fache, 8fache etc. oder $\frac{2}{m}$, $\frac{4}{m}$, $\frac{8}{m}$, $\frac{16}{m}$ etc. denkt, so ist klar, dass diese letztern Saitentheile stets wieder den nämlichen Ton, nur immer eine Octave tiefer geben müssen. Hieraus folgt die allgemeine Regel, dass nur diejenigen Töne in höhern Potenzen oder Octaven als Flageolet-Töne erzeugt werden können, von deren Saitenlängen der Zähler des Bruchs eine ganze Potenz der Zahl 2, also entweder 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64 oder überhaupt 2^n ist, wenn n eine ganze Zahl bedeutet.

Von den in der enharmonischen Scala Tafel I vorkommenden Tönen sind also bei blosser einfacher Berührung der Saite nur

die gr. Secunden	mit $\frac{8}{9}$ Saitenl.;	die übermässigen Quinten	mit $\frac{16}{25}$ Saitenl.
„ übermässigen Sec.	„ $\frac{64}{75}$ „	„ grossen Septimen	„ $\frac{8}{15}$ „
„ grossen Terzen	„ $\frac{4}{5}$ „	„ übermässigen Septimen	„ $\frac{64}{125}$ „
„ Quinten	„ $\frac{2}{3}$ „	„ Octaven	„ $\frac{1}{2}$ „

als Flageolet-Töne zu erzeugen möglich; ausserdem freilich noch eine grosse Menge andrer Töne, wie z. B. die kleinsten Septimen mit $\frac{4}{7}$ Saitenlänge, überhaupt alle Töne, denen $\frac{2^n}{m}$ als Saitenlänge zukommt, wo n und m ganze Zahlen sind. Da indess diese Töne in unserer Musik nicht vorkommen, so ist es auch nicht nöthig, sie näher zu betrachten.

§. 137.

Man sieht ferner aus dem Vorigen, dass jedes Intervall, in dessen Saitenverhältniss der Zähler eine ganze Potenz der Zahl 2 ist, stets bloss das nämliche Intervall, nur in einer höhern Region als Flageoletton geben kann. So giebt z. B. die grosse Terz mit $\frac{4}{5}$ oder $\frac{2^2}{5}$ Saitenlänge zum Flageoletton wieder eine grosse Terz; die Quinte mit $\frac{2}{3}$ oder $\frac{2^1}{3}$ Saitenlänge wieder eine Quinte; die grosse Septime mit $\frac{8}{15}$ oder $\frac{2^3}{15}$ Saitenlänge wieder eine grosse Septime; die Octave mit $\frac{1}{2}$ oder $\frac{2^0}{2}$ Saitenlänge wieder die Octave etc. Stellt man sich, wie hier geschehen ist, den Zähler als Potenz der Zahl 2 vor, so zeigt der Potenzexponent zugleich diejenige Octave oder Region an, in welcher das erzeugende Intervall als Flageolet-Intervall erscheint, (vergl. §. 148. und 149.)

§. 138.

Dass endlich diejenigen Flageoletttöne, wo der tonbestimmende aliquote Saitentheil nur ein sehr kleines Stück von der ganzen Saite ist, wie z. B. bei Erzeugung der übermässigen Secunden und übermässigen Septimen, wo er beziehentlich nur $\frac{1}{75}$ oder $\frac{1}{125}$ Saite beträgt, in sehr hohe Regionen fallen und daher nur schwer vernehmlich sein müssen, wird an sich klar sein.

§. 139.

Wenn der Bruch, welcher die Saitenverhältnisszahl des erzeugenden Tones angiebt, auf seine einfachste Gestalt gebracht ist, so stellt der Nenner desselben stets die Anzahl Theile dar, in welche sich die Saite harmonisch zerlegt. Alle diejenigen Intervalle, welche einen Flageoletton erzeugen, müssen also auch dann noch denselben Flageoletton geben, wenn man das erzeugende Intervall eine Octave höher nimmt. Greift man z. B. den grossen Ton um eine Octave höher, so gehören ihm dann $\frac{8}{18}$ oder $\frac{4}{9}$ Saitenlänge zu und der Flageoletton ist wieder die 3te 8^{va} der gr. Secunde. Nimmt man die kleine Terz eine Octave höher, so kommen ihr dann $\frac{5}{12}$ Saitenlänge zu, der tonbestimmende Theil wird $\frac{1}{12}$ Saite und es muss also wieder die Quinte, nur um eine Octave höher erscheinen.

Der Flageoletton bleibt sich nämlich auch hinsichtlich seiner Region gleich, wenn der Zähler im Saitenverhältniss des nicht erhöhten, erzeugenden Intervalles eine gerade Zahl ist; der Flageoletton steigt aber um eine Octave, wenn dieser Zähler eine ungerade Zahl ist. Der grosse Ton, die kleinste und grosse Terz, die Quinte, kleinste und grosse Septime geben also, eine Octave höher gegriffen, den ihnen eigenthümlichen Flageoletton ganz unverändert auch in der nämlichen Region wieder, während alle übrigen §. 135 aufgeführten Intervalle, in der höhern Octave gegriffen, auch ihren Flageoletton um eine Octave höher geben.

§. 140.

Die bisher betrachteten Flageolettöne sind die der Saite eigenthümlichen natürlichen Töne, welche durch blosse einmalige Berührung der Saite an den geeigneten Stellen erzeugt werden können. Da sie nicht alle gebräuchlichen Intervalle erschöpfen, so muss man, um die übrigen Töne, Quarten, Sexten etc. als Flageolettöne zu erhalten, die Saite durch feste Aufsetzung eines andern Fingers erst noch künstlich auf einen andern Ton stimmen, unter dessen Sons harmoniques der verlangte Ton mit vorkommt. Der Ton $\bar{c}$ z. B. kann auf der Violine mittelst einfacher Berührung einer Saite derselben nicht als Flageoletton erzeugt werden. Greift man aber z. B. auf der Saite $\bar{d}$ den Ton $\bar{f}$ fest, und dann noch den Ton $\bar{c}$ oder die Quinte von $\bar{f}$ harmonisch, so muss die Octave dieser Quinte, also $\bar{c}$ als Flageoletton erscheinen. Der Ton $\bar{es}$ könnte als Octave der Quinte von $\bar{as}$ angesehen werden; er müsste also als Flageoletton erscheinen, wenn man auf der Saite $\bar{d}$ den Ton $\bar{as}$ fest, und dann noch dessen Quinte $\bar{es}$ harmonisch nähme etc.

Diese Beispiele sollen übrigens bloss zur Erläuterung dienen, nicht aber als Vorschrift, wie man die künstlichen Flageolettöne am besten erzeugen könne. Ich vermag bloss die Theorie anzugeben, das Aufsuchen der anwendbarsten und leichtesten Doppelgriffe muss ich dem Spieler selbst überlassen.

§. 141.

Aus §. 139 erhellet, dass alle auf ihre einfachste Gestalt gebrachten Saitenverhältnisse, welche einerlei Zahl im Nenner haben, auch einerlei Flageoletton z. B. $\frac{3}{10}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{9}{10}$ stets die 3te 8ve der gr. Terz; $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{8}$ stets die 3te 8ve des Grundtons; $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$ stets die 2te 8ve der gr. Terz etc. geben müssen und dass man also einerlei Flageoletton auf verschiedene Weise erzeugen kann.

§. 142.

Das Bisherige wird völlig hinreichen, um den Musiker in den Stand zu setzen, die Berührungsstellen für die Flageolettöne theoretisch zu ermitteln, und für verschiedene Flageolet-Tonleitern die besste Applicatur ausfindig zu machen. Ich begnüge mich daher, in Folgendem nur noch eine allgemeine Uebersicht der Berührungsstellen für die natürlichen und brauchbarsten Flageolettöne in Tausendtheilen der ganzen Länge der Saite zu geben. Der Violin- oder Violoncell-Spieler kann die Berührungsstellen nach der mit angegebenen Lage der benannten Intervalle, der Guitarrespieler nach der Lage der Bünde beurtheilen. Die kleinsten Septimen (k) sind mit aufgenommen worden, weil sie in der Ausübung die Stelle unsrer temperirten kleinen Septimen vertreten können.

Saitenlänge vom Stege an	Orte der benannten Intervalle	Sons harmoniques	Berührungsstelle	Orte der Bünde auf der Guitarre	für:
$\frac{15}{16}$	gr. halber Ton	4te 8va der 1.	937	943	1.
$\frac{14}{15}$		3te 8va „ gr. 7.	933		
$\frac{13}{14}$		„ „ „ kl. 7. (k)	928		
$\frac{11}{12}$		„ „ „ 5.	917		
$\frac{9}{10}$	kleiner Ton	„ „ „ 3.	900	891	2.
$\frac{8}{9}$		„ „ „ 2.	889		
$\frac{7}{8}$		„ „ „ 1.	875		
$\frac{13}{15}$		„ „ „ gr. 7.	866		
$\frac{6}{7}$	kleinste Terz	2te 8va „ kl. 7. (k)	857	841	3.
$\frac{5}{6}$		„ „ „ 5.	833		
$\frac{13}{16}$	grosse Terz	4te 8va „ 1.	812	794	3.
$\frac{4}{5}$		2te „ „ 3.	800		
$\frac{11}{14}$	Quarte	3te „ „ kl. 7. (k)	786	749	4.
$\frac{7}{9}$		3te „ „ 2.	777		
$\frac{3}{4}$		2te „ „ 1.	750		
$\frac{11}{15}$		3te „ „ gr. 7.	733		
$\frac{5}{7}$	Quinte	2te „ „ kl. 7. (k)	714	707	4.
$\frac{7}{10}$		3te „ „ 3.	700		
$\frac{11}{16}$		4te „ „ 1.	687		
$\frac{2}{3}$		1te „ „ 5.	666		
$\frac{9}{14}$	kl. Sexte	3te „ „ kl. 7. (k)	644	630	6.
$\frac{5}{8}$		3te „ „ 1.	625		
$\frac{3}{5}$	gr. Sexte	2te „ „ 3.	600	595	6.
$\frac{7}{12}$	grösste Sexte	3te „ „ 5.	583	561	7.
$\frac{4}{7}$	kleinste 7.	2te „ „ kl. 7. (k)	571		
$\frac{9}{16}$	kleinere „	4te „ „ 1.	563		
$\frac{5}{9}$	kleine „	3te „ „ 2.	556		
$\frac{8}{15}$	grosse „	3te „ „ gr. 7.	533	530	7.
$\frac{1}{2}$	Octave	1te „ „ 1.	500	500	8.

Eine noch bessere Uebersicht von der Lage dieser Berührungsstellen kann man sich übrigens leicht dadurch verschaffen, wenn man auf dem §. 70 beschriebenen Tonmesser oder auch auf dem Griffbrette der Violine oder des Violoncells eine Linie für die Sons harmoniques nach den Angaben der vorstehenden Tabelle eintheilt.

§. 143.

Schliesslich glaube ich noch Folgendes erwähnen zu müssen. Nach §. 48, §. 141 geben die Saitentheile $\frac{1}{11}$, $\frac{2}{11}$, $\frac{3}{11}$, $\frac{4}{11}$ etc. einen Ton l, welcher um $\frac{15}{1000}$ Octave niedriger als $f^{\sharp}$ und um $\frac{44}{1000}$ Octave höher als f ist; eben so geben Saitenlängen wie $\frac{1}{13}$, $\frac{2}{13}$, $\frac{3}{13}$, $\frac{4}{13}$ etc. einen Ton m, welcher der kleinen Sexte bis auf 0,022, der grossen Sexte bis auf 0,037 Octave nahe kommt. Für die blosse Fortschreitung könnten daher beide Töne l und m statt der Quarten und Sexten benutzt werden, wenn man sich jene Abweichungen von der Reinheit erlauben will. In der That wird das ungeübte Gehör die Tonfolge c d e l g für die Tonfolge c d e f g hinnehmen. Der Musiker aber darf sich durch diese blosse Aehnlichkeit nicht zu der irrigen Ansicht verleiten lassen, als seien die Quarten und Sexten wirklich als natürliche Flageolettöne, nur etwas unrein, zu erhalten; sie sind vielmehr als solche unmöglich, und es ist eine nothwendige Folge der Schwingungsgesetze, dass statt der Quarten und Sexten stets nur jene beiden ihnen nahe kommenden Intervalle l und m erscheinen müssen.

Wenn endlich der Flageolettton auch dann erscheint, wenn man die Berührungsstelle nur annähernd genau trifft, so ist diess keineswegs ein Einwurf gegen die Theorie. In Folge der Schwingungsgesetze (§. 21) bildet sich nämlich demungeachtet der Schwingungsknoten unter dem berührenden Finger genau an derjenigen Stelle, welche die Saite in die entsprechenden aliquoten Theile abzutheilen vermag, weil sonst kein Gleichgewicht zwischen den Partialschwingungen (§. 39), der Flageolettton selbst also gar nicht Statt finden könnte. Daher muss auch jedenfalls die Knotenstelle wenigstens so weit genau getroffen werden, dass die Saite zu Bildung eines Schwingungsknotens unter dem leise berührenden (also die nöthige Freiheit gewährenden) Finger angeregt und unterstützt, nicht aber an der Bildung des zugehörigen nächstanliegenden Schwingungsbogens gehemmt wird.

III. Über die absolute Anzahl der den Tönen zugehörigen Schwingungen.

§. 144.

Nach §. 43 war es für unsern Zweck nicht erforderlich, die absolute Menge der Tonpulse d. h. diejenige Anzahl Pulse zu ermitteln, welche den Tönen in einer bestimmten Zeit, z. B. in 1 Secunde zukommen. Die Kenntniss derselben und der Art und Weise wie man sie gefunden, ist jedoch auch für den Musiker insofern nicht ohne Interesse, als man die Verschiedenheit der Stimmung der Orchester nach den Schwingungsmengen anzugeben pflegt, welche den gebräuchlichen Stimmgabeln oder dem $\bar{a}$ in 1 Sexagesimal-Zeitsecunde angehören.

Die von Chladni angegebene Methode, mittelst eines an einem Ende befestigten Stabes die absoluten Tonschwingungen zu finden, ist bereits §. 22 erwähnt worden, und wird keiner weitem Erläuterung bedürfen. Eben so leicht erhellt, dass man mittelst der Sirene die, irgend einem Tone in 1 Secunde zugehörige Pulsmenge durch wiederholte Versuche mit aller erforderlichen Genauigkeit auffinden kann, indem es nur darauf ankommt, die Umläufe genau zu ermitteln, welche die Scheibe in 1 Secunde gemacht hat, um dann hiernach sofort die Anzahl der Pulse zu finden, welche irgend einem von der Scheibe angegebenen Tone in 1 Secunde zukommen. Eine meiner Sirenen macht z. B. $11\frac{3}{8}$ Umläufe, während das bewegende Rad sich einmal um seine Axe dreht. Wurde also das Rad so gedreht, dass es in jeder Secunde einen Umlauf machte, was sehr leicht mit der blossen Hand bewerkstelligt werden konnte, indem man nur tacthaltend mit den Pendelschlägen einer astronomischen Uhr zu drehen brauchte, so gab ein Kreis von 48 Oeffnungen auf der Sirene $48 \times 11\frac{3}{8} = 544,5$ Pulse in 1 Secunde. Der Ton, welchen diese Pulsmenge gab, wurde nun mit Hülfe des §. 70 flg. beschriebenen Monochords mit dem $\bar{a}$ einer Dresdner Stimmgabel verglichen, indem zuvörderst eine nach §. 73 geprüfte Saite genau auf dieses $\bar{a}$ gestimmt, dann aber die Saite durch Einsetzung des Steges Fig. 14 so weit verkürzt wurde, bis sie denselben Ton von 544,5 Pulsen wie die Sirene angab. Der Steg zeigte dann auf dem hunderttheiligen Maassstabe des Monochords (vergl. §. 70) an, dass die Saite bis auf 0,806 verkürzt worden sei, woraus endlich folgte, dass dem $\bar{a}$ der Stimmgabel $544,5 \times 0,806 = 438,86$ Pulse in der Secunde angehörten. Obwohl dieser Versuch nur ein ganz roher war, so ist doch die Anzahl der Pulse schon sehr genau.

Ein drittes Mittel geben endlich die §§. 40 und 90 betrachteten Stösse an die Hand. Stellen wir uns vor, dass die Zeichen (c), ($c^{\sharp}$), (d) (e^b), (e) . . . ($\bar{c}$) die den gleichnamigen Tönen in 1 Secunde zugehörigen absoluten Pulsmengen bedeuten, so wird das Intervall $\frac{c^{\sharp}}{c}$ nach §. 90 in 1 Secunde eine Anzahl Stösse $\alpha = (c^{\sharp}) - (c)$; das Intervall $\frac{d}{c^{\sharp}}$ eine Anzahl Stösse $\beta = (d) - (c^{\sharp})$; das Intervall $\frac{e^b}{d}$ eine Anzahl Stösse

$\gamma = (e^b) - (d)$; etc. endlich das Intervall $\frac{\bar{c}}{h}$ eine Anzahl Stösse $\lambda = (\bar{c}) - (h)$ geben; mithin wird die Anzahl aller innerhalb der ganzen Octave erlangten Stösse sein $= \alpha + \beta + \gamma \dots + \lambda$. Diese Summe wird aber auch sein $(\bar{c}) - (c) = (c)$, weil die Pulsmenge $(\bar{c})$ doppelt so gross ist als die Pulsmenge (c) . Beobachtet man also jene Stösse $\alpha, \beta, \gamma \dots \lambda$, so giebt deren Summe ohne Weiteres die Anzahl Pulse für den Ton c in 1 Secunde.

Oder hätte man bloss die Stösse von $\frac{e}{e^b}, \frac{e^b}{d}, \frac{d}{c^\sharp}, \frac{c^\sharp}{c}$ beobachtet, so wäre ihre Summe gleich dem Unterschiede der Schwingungsmengen von e und c . Erinnern wir uns nun, dass die Pulse von e und c in dem Verhältniss von 5 zu 4 stehen, mithin nach §. 90 von diesen beiden Tönen allemal nur 1 Stoss erzeugt wird, während $c \dots 4$ Pulse oder $e \dots 5$ Pulse macht, so erhellet, dass man jene beobachtete Summe von Stössen zwischen e und c nur mit der Zahl 4 oder 5 zu multipliciren braucht, um die Anzahl Pulse für c oder e in 1 Secunde zu erhalten.

Seien überhaupt m und n die absoluten Pulszahlen der beiden Töne, und a die Anzahl der von ihnen in 1 Secunde erzeugten Stösse; ferner $m' : n'$ das am Monochord beobachtete Verhältniss ihrer Schwingungsmengen; so hat man $m - n = a$ und $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$, folglich $n \frac{m'}{n'} - n = a$ und endlich

$$n = \frac{n' a}{m' - n'}.$$

Beispiel. Ich stimmte zwei geprüfte Saiten auf einen vorerst unbestimmten Ton x , welcher zwischen $c^\sharp$ und d lag, setzte dann den Steg Fig. 14 unter die eine Saite und verschob ihn so lange, bis beide zugleich in Schwingung gesetzte Saiten 4 Stösse in 1 Secunde erzeugten; ich fand, dass die eine Saite bis auf 0,973 verkürzt war, das Pulsverhältniss $\frac{m'}{n'}$ war also $\frac{1000}{973}$ und $a = 4$, mithin die absolute Pulsmenge von $x = \frac{973 \times 4}{1000 - 973} = \frac{3892}{27} = 144,1$ Schwingungen. Weiter fand sich mittelst des Monochords, dass der Ton x sich zum $\bar{a}$ der obgedachten Stimmgabel verhielt wie 661 : 2000; folglich ergaben sich aus diesem einzigen Versuch zuletzt für $\bar{a}$

$$\frac{2000 \times 144,1}{661} = 436,0 \text{ Schwingungen.}$$

Es ist übrigens dieser Versuch ebenfalls nur als ein Beispiel anzusehen, und die nahe Uebereinstimmung des Ergebnisses mit dem an der Sirene erlangten Resultate mehr dem Zufall als der Genauigkeit der Versuche beizumessen.

Mit Hülfe der Stösse hat in neuester Zeit Heinrich Scheibler, Seidenmanufacturist in Crefeld, die dem Tone $\bar{a}$ in 1 Secunde zugehörigen Schwingungen mit grosser Sorgfalt ermittelt, und gefunden, dass — in unsern Ausdrücken, nach welchen ein Hingang und Rückgang zusammen genommen erst für Eine Schwingung gelten — dem Tone $\bar{a}$

- 1) beim Conservatorium zu Paris . . . 434,35 Schwingungen,
- 2) beim Berliner Orchester . . . 441,62 „
- 3) beim Wiener Orchester . . . 440,87 „

zukommen. Hiernach ist die Berliner Stimmung, nach unsern Logarithmen berechnet, um $\frac{24}{1000}$ Octave höher als die Pariser, was nahe genau $\frac{2}{7}$ eines halben Tons der gleichschwebend temperirten 12stufigen Scala, oder $\frac{2}{7}$ des Intervalls $\frac{\bar{b}}{a}$ ausmacht. Dagegen differirt hiernach die Berliner Stimmung gegen die Wiener nur um $\frac{2}{1000}$ Octave, eine kaum wahrnehmbare Grösse.

IV. Populäre Darstellung der Theorie der Logarithmen, soweit solche zum Verständniss der vorliegenden Schrift nöthig ist.

§. 145.

Wenn irgend eine Grösse z. B. die Zahl 5 mit sich selbst multiplicirt wird, so nennt man das Product, hier 5×5 oder die Zahl 25, das Quadrat oder auch die zweite Potenz jener Grösse, weil diese Potenz aus zwei gleichen Factoren entstanden ist. Die dritte Potenz dieser Grösse würde $5 \times 5 \times 5$ sein, wo die 5 dreimal als Factor vorkommt; die 4te Potenz würde $5 \times 5 \times 5 \times 5$ sein u. s. w. Der Kürze wegen deutet man die verschiedenen Potenzen einer Grösse dadurch an, dass man diese Grösse selbst nur einmal schreibt, oben aber zur Rechten mittelst einer kleineren Ziffer bemerkt, wie oft sie als Factor genommen werden soll. So ist also

5^2 die 2te Potenz der 5 einerlei mit 5×5 oder 25,

5^3 die 3te Potenz der 5 einerlei mit $5 \times 5 \times 5$ oder 125,

w^n die n te Potenz von w , wo man, wenn n und w in Zahlen gegeben sind, die Zahl w so oft als Factor zu nehmen hat, als in der Zahl n Einheiten enthalten sind.

§. 146.

Die Zahl, welche mit sich selbst zu multipliciren ist, heisst die Grundzahl der Potenz, die kleine Ziffer aber, welche andeutet, wie oft diese Grundzahl als Factor genommen werden soll, nennt man den Exponenten der Potenz. In dem Ausdrucke 6^3 ist also die 6 die Grundzahl und die 3 der Potenzexponent; die Potenz selbst aber $= 6 \times 6 \times 6 = 216$.

§. 147.

Wenn Potenzen von einerlei Grundzahl mit einander multiplicirt werden sollen, so braucht man bloss ihre Exponenten zu addiren und die erhaltene Summe als Potenzexponenten an die Grundzahl anzufügen.

Es sei z. B. 5×5 oder 5^2 zu multipliciren
mit $5 \times 5 \times 5$ oder 5^3

so kommt $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$ oder 5^5 .

§. 148.

Wenn Potenzen von einerlei Grundzahl in einander dividirt werden sollen, so braucht man bloss den Exponenten des Divisors vom Exponenten des Dividenden abzuziehen und den Rest als Potenzexponenten der Grundzahl anzufügen. So ist z. B.

$$\frac{5 \times 5 \times 5}{5 \times 5} = \frac{5^3}{5^2} = 5^{3-2} = 5^1 = 5,$$

welches man auch auf dem gewöhnlichen Wege findet aus $\frac{5 \times 5 \times 5}{5 \times 5} = \frac{125}{25} = 5$. Es heben sich nämlich von der im Dividenden vorkommenden Anzahl Factoren so viele auf, als deren im Divisor enthalten sind. Auch ersieht man hieraus zugleich, dass jede Grösse, auf ihre erste Potenz erhoben, sich selbst gleich ist; $5^1 = 5$; $6^1 = 6$; $w^1 = w$ etc.

§. 149.

Wenn bei gleicher Grundzahl auch die Exponenten gleich sind, so kommt man bei der Division auf einen Ausdruck, welcher die Grundzahl auf der Potenz 0 (Null) darstellt. Z. B. $\frac{6 \times 6}{6 \times 6} = \frac{6^2}{6^2} = 6^{2-2} = 6^0$. Da nun 6×6 oder 36 dividirt durch 6×6 oder 36, so wie überhaupt jede Zahl oder Grösse durch sich selbst dividirt, zum Quotienten stets die Zahl 1 giebt, so folgt, dass jede Grösse auf die 0te Potenz erhoben, der Zahl 1 gleich ist. Also $5^0 = 1$; $9^0 = 1$; $w^0 = 1$ u. s. w., weil man sich z. B. den Ausdruck 5^0 aus $\frac{5^3}{5^3}$ oder aus $\frac{5^1}{5^1}$ etc. entstanden denken kann.

§. 150.

Wenn man von einer schon als Potenz gegebenen Grösse wieder eine neue Potenz nehmen, z. B. 5^2 auf die 3te Potenz erheben soll, so heisst diess den Factor 5^2 dreimal nehmen, also $5^2 \times 5^2 \times 5^2$ oder $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^6$. Hieraus erhellet, dass man den Exponenten der vorgegebenen, auf eine neue Potenz zu erhebenden Grundzahl nur mit derjenigen Zahl zu multipliciren braucht, welche andeutet, auf welche Potenz jene Grösse erhoben werden soll.

Im vorigen Beispiele also hätte man, da von 5^2 die 3te Potenz genommen werden soll, den Ausdruck $5^{3 \times 2}$ oder 5^6 . Wenn 3^4 auf die 2te Potenz erhoben werden sollte, hätte man $3^{4 \times 2} = 3^8$ u. s. w.

§. 151.

Da die 2te Potenz oder das Quadrat aus zwei gleichen Factoren, die dritte Potenz oder der Cubus aus 3, die 4te Potenz aus 4, die n te Potenz aus n gleichen Factoren besteht, so stellt man aus diesen Potenzen ihre Grundzahl offenbar wieder her, wenn man den Potenzexponenten beim Quadrat mit der Zahl 2, beim Cubus mit der 3, bei der 4ten Potenz mit der 4, überhaupt bei der n ten Potenz mit n dividirt. Man nennt diess beziehentlich die Quadratwurzel, Cubikwurzel, Wurzel des 4ten, n ten Grades ausziehen, und deutet solches vor der Grösse an durch ein verzogenes R (Radix), über welchem man den Grad der Wurzel durch die entsprechende Ziffer anzeigt, z. B. $\sqrt[3]{5}$ = Cubikwurzel aus der Zahl 5. Bei der Quadratwurzel setzt man bloss das Zeichen $\sqrt{}$. Dieses Ausziehen einer verlangten Wurzel aus einer Grösse ist also das Umgekehrte von dem Erheben einer Grösse auf eine verlangte Potenz. So wie man daher im letzten Falle den Exponenten der vorgegebenen Grösse mit dem Exponenten der verlangten Potenz zu multipliciren hat, muss man im andern Falle, wo aus der vorgegebenen Potenz eine verlangte Wurzel ausgezogen werden soll, mit derjenigen Zahl, welche den Grad dieser Wurzel anzeigt, den Exponenten der vorgegebenen Grösse dividiren. So findet man z. B. aus 2^8 oder 256 die Quadratwurzel, wenn man den Exponenten 8 durch 2 dividirt; man erhält den Ausdruck $2^{\frac{8}{2}} = 2^4$ oder die Zahl 16 als Quadratwurzel von 256. Ist eine Grösse nur für sich allein ohne einen Exponenten gegeben, so hat man sich (vergl. §. 148) den Exponenten 1 hinzu zu denken. Für die Quadratwurzel aus der Zahl 2 hätte man also den Ausdruck $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$; für die Cubikwurzel aus 2 den Ausdruck $\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$ u. s. w.

§. 152.

Die Logarithmen sind nun nichts anderes als solche Potenzexponenten. Man nimmt nämlich eine beliebige Zahl als Grundzahl an und drückt dann alle übrigen gemeinen Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 etc. als Potenzen dieser Grundzahl aus. Diese letztere heisst die Basis des logarithmischen Systems und die verschiedenen Exponenten derselben sind dann die Logarithmen derjenigen gemeinen Zahlen, welche sie aus der Grundzahl erzeugen. Denken wir uns zur Erläuterung die Zahl 2 in ihren aufeinanderfolgenden ganzen Potenzen, mit den diesen Potenzen entsprechenden gemeinen oder natürlichen Zahlen verbunden, auf folgende Weise:

Potenzen der 2.	Werth in gemeinen Zahlen.	Potenzen der 2.	Werth in gemeinen Zahlen.	Potenzen der 2.	Werth in gemeinen Zahlen.
2^0	1	2^7	128	2^{14}	16384
2^1	2	2^8	256	2^{15}	32768
2^2	4	2^9	512	2^{16}	65536
2^3	8	2^{10}	1024	2^{17}	131072
2^4	16	2^{11}	2048	2^{18}	262144
2^5	32	2^{12}	4096	2^{19}	524288
2^6	64	2^{13}	8192	2^{20}	1048576

so haben wir schon einen Theil desjenigen logarithmischen Systems, in welchem die Basis = 2 ist. Der Exponent 3 ist dann der Logarithmus von der gemeinen Zahl 8; der Exponent 5 ist der Logarithmus von der gemeinen Zahl 32; die 9 der Logarithmus von 512 u. s. w. Hieraus erhellet zugleich, dass in jedem logarithmischen Systeme der Logarithmus der natürlichen Zahl 1 stets gleich Null und der Logarithmus der Grundzahl des Systems stets = 1 sein muss. Diese Systeme, deren so viele möglich sind, als man sich verschiedene Grundzahlen denken kann, gewähren, wie man schon aus Obigem abnehmen kann, den grossen Rechnungsvortheil, dass sie die oft sehr beschwerliche Multiplication in eine bloss Addition, die Division in eine bloss Subtraction, das Erheben von Potenzen in eine ganz einfache Multiplication, und das Ausziehen von Wurzeln in eine eben so einfache Division verwandeln.

§. 153.

Hätte man z. B. die Zahl 256 mit der Zahl 2048 zu multipliciren, so sieht man in die hierzu ein für allemal berechnete Logarithmentafel nach, welche Logarithmen diesen beiden Zahlen angehören. In obigem Systeme fände man für die gemeine Zahl 256 den Logarithmus 8, für die 2048 den Logarithmus 11. Addirt man diese Logarithmen, so erhält man $8 + 11 = 19$. Diese 19 ist der Logarithmus des Products und zeigt, in der Tafel aufgesucht, die natürliche Zahl 524288 oder das Product aus 256×2048 an.

§. 154.

Hätte man 262144 durch 32768 zu dividiren, so würde man von dem Logarithmus 18 den Logarithmus 15 abziehen; der Rest 3 würde dann der Logarithmus des gesuchten Quotienten sein und die natürliche Zahl 8 als

solchen anzeigen. Da ein Bruch nichts weiter, als eine angedeutete Division ist, so erhellet, dass der Logarithmus eines Bruches gleich ist dem Unterschiede der Logarithmen des Zählers und des Nenners; z. B. Logarithmus von $\frac{128}{32} = 7 - 5 = 2$.

§. 155.

Wäre die Zahl 32 auf ihre 3te Potenz zu erheben, so hätte man nach §. 150 bloss den Logarithmus der Zahl 32 mit 3 zu multipliciren, oder $3 \times \log. 32$ zu nehmen, um den Logarithmus der 3ten Potenz von 32 zu erhalten; also $3 \times 5 = 15 = \text{Logarithmus von } 32^3$ oder von 32768. Wenn überhaupt der Logarithmus von irgend einer Potenz, z. B. von $w^1, w^2, w^3 \dots w^n$ zu nehmen wäre, so würde man beziehentlich $1 \times \log. w, 2 \times \log. w, 3 \times \log. w, \dots n \times \log. w$ setzen müssen.

§. 156.

Sollte aus der Zahl 1024 die Quadratwurzel ausgezogen werden, so würde man ihren Logarithmus 10 nur durch die Zahl 2 zu dividiren haben, um in dem Quotienten 5 den Logarithmus der gesuchten Quadratwurzel 32 zu finden. Für den Logarithmus der Quadratwurzel von der Zahl 2 würde man in jenem Systeme die Zahl $\frac{1}{2}$ oder 0,5 finden, und hieraus wird nun erhellen, warum in §. 61 beim Centrum der Octave für den Logarithmus von $\sqrt{2}$ die Zahl 500 gesetzt worden ist, weil wir nämlich für den Logarithmus der Octave oder der Zahl 2 nicht bloss die Zahl 1 sondern die Zahl 1000 angenommen haben.

§. 157.

Da im obigen Systeme der Logarithmus von 2 gleich 1, der Logarithmus von 4 gleich 2 ist, so muss offenbar der Logarithmus von der Zahl 3 zwischen 1 und 2 fallen, also 1 und ein Bruch sein; eben so müssen die Logarithmen der Zahlen 5, 6, 7 zwischen 2 und 3, die Logarithmen von 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 zwischen 3 und 4 fallen u. s. w. Die hinzukommenden Brüche werden in Decimalen der Hauptziffer angefügt. Wie man diese Brüche findet, kann hier nicht gezeigt werden, da solches mehr Vorkenntnisse aus der mathematischen Analysis zum Verstehen des Vortrages voraussetzt, als ich bei vorliegender Darstellung ins Auge fassen durfte.

§. 158.

In dem gewöhnlich gebräuchlichen, sogenannten *Briggischen* Logarithmensysteme ist die Basis = 10. In demselben hat man also

Natürliche Zahlen.	Als Potenz der Zahl 10	Folglich als Logarithmen
	betrachtet.	
1	= 10^0	0
10	= 10^1	1
100	= 10^2	2
1000	= 10^3	3
10000	= 10^4	4
etc.	etc.	etc.

In diesem Systeme haben daher alle natürlichen Zahlen von

1 bis mit 9	zu ihrem Logarithmus	die 0 und beziehentlich einen Bruch,
10 „ „ 99	„ „ „ 1 „ „	„ „ „
100 „ „ 999	„ „ „ 2 „ „	„ „ „
1000 „ „ 9999	„ „ „ 3 „ „	„ „ „
etc.	etc.	etc.

Die ganze Ziffer im Logarithmus ist mithin stets um eine Einheit kleiner als die Ziffer, welche die Menge der in der natürlichen Zahl enthaltenen Zahlstellen angiebt. Alle natürlichen Zahlen von 1000 bis 9999 haben z. B. vier Zahlstellen und die ganze Ziffer in ihrem Logarithmen ist blos 3 u. s. w. Diese ganze Ziffer des Logarithmus nennt man die *Characteristik* oder *Kennziffer*, den angehörigen Bruch aber die *Mantisse*. Da nach Vorigem in dem auf die Grundzahl 10 basirten Logarithmensysteme die Kennziffer aus der Menge der Zahlstellen der vorgegebenen natürlichen Zahl*) leicht erkannt wird, so pflegt man selbige in den Logarithmentafeln auch gar nicht mit anzugeben, man überlässt es vielmehr dem Rechner, dieselben nach obiger Regel hinzuzufügen.

*) Die an der natürlichen Zahl etwa mit vorkommenden Decimalen werden dabei nicht mit gezählt; die Zahl 1738,5473 hat zur Kennziffer ihres Logarithmus ebenfalls bloss die 3; es sind also bloss die vor dem Einer-Comma befindlichen Zahlstellen zu beachten.

§. 159.

Um die Logarithmen eines Systems in Logarithmen eines andern Systems zu verwandeln, bedarf man des sogenannten Modul's, d. i. derjenigen Zahl, mit welcher man die Logarithmen des einen Systems multipliciren muss, um die Logarithmen des andern Systems zu erhalten. Diesen Modul findet man durch blosse Division derjenigen Logarithmen, welche in beiden Systemen einerlei natürlicher Zahl angehören. Zu Messung der Tonverhältnisse haben wir uns aus den §. 45 angeführten Gründen desjenigen Systems bedient, in welchem die Basis = 2 ist; in diesem Systeme ist daher der Logarithmus der natürlichen Zahl 2 gleich 1. In dem gewöhnlichen oder *Briggischen* Logarithmensysteme ist aber der Logarithmus der Zahl 2 gleich 0,30103. Dividirt man nun jenen Logarithmus 1 durch diesen letztern, so erhält man den §. 45 angegebenen Modul 3,321928 . . . , womit man den für eine gewisse natürliche Zahl aus dem *Briggischen* Systeme entnommenen Logarithmus multipliciren muss, um für diese natürliche Zahl den zu unserm Systeme gehörigen Logarithmus zu erhalten.

Berichtigungen.

- Seite 25 Zeile 6 v. o. fehlt für das Pulsverhältniss 1. 3. 9. der erste Accent '.
- „ 28 „ 8 v. o. lese man desto statt deste.
- „ 36 { Pulsverhältnisse für die 19stufige Scala, lese man 11,16 statt 11,45.
- „ „ „ „ „ „ „ 16,67 „ 16,66.
- „ „ „ „ 12stufige „ „ „ 10,59 „ 10,60.
- „ 40 Zeile 2 v. u. lese man wo G statt in G.
- „ 42 „ 16 v. u. „ „ m''M' „ m''M.

Taf. I.

Ton-Verhältnisse in der enharmonischen Tonleiter.

Töne.	Namen der Stufen.	Zeichen.	Puls-Verhältnisse.		Exponenten der Stufen.		Logarithmen	
							der Töne.	der Stufen.
c	Octave	8	2	2000	$\frac{128}{125}$	1,024	1000	34
H $\sharp$	Septime übermässig	7 $\sharp$	$\frac{125}{64}$	1953 $\frac{1}{8}$	$\frac{3125}{3072}$	1,017	966	25
c $\flat$	Octave vermindert	8 $\flat$	$\frac{48}{25}$	1920	$\frac{128}{125}$	1,024	941	34
H	Septime gross	7	$\frac{15}{8}$	1875	$\frac{25}{24}$	1,041	907	59
B	„ klein	7 $\flat$	$\frac{9}{5}$	1800	$\frac{648}{625}$	1,037	848	52
A $\sharp$	Sexte übermässig	6 $\sharp$	$\frac{125}{72}$	1736 $\frac{1}{9}$	$\frac{25}{24}$	1,041	796	59
A	„ gross	6	$\frac{5}{3}$	1666 $\frac{2}{3}$	$\frac{25}{24}$	1,041	737	59
A $\flat$	„ klein	6 $\flat$	$\frac{8}{5}$	1600	$\frac{128}{125}$	1,024	678	34
G $\sharp$	Quinte übermässig	5 $\sharp$	$\frac{25}{16}$	1562 $\frac{1}{2}$	$\frac{25}{24}$	1,041	644	59
G	„ rein	5	$\frac{3}{2}$	1500	$\frac{25}{24}$	1,041	585	59
G $\flat$	„ vermindert	5 $\flat$	$\frac{36}{25}$	1440	$\frac{648}{625}$	1,037	526	52
F $\sharp$	Quarte übermässig	4 $\sharp$	$\frac{25}{18}$	1388 $\frac{8}{9}$	$\frac{25}{24}$	1,041	474	59
F	„ rein	4	$\frac{4}{3}$	1333 $\frac{1}{3}$	$\frac{128}{125}$	1,024	415	34
E $\sharp$	Terz übermässig	3 $\sharp$	$\frac{125}{96}$	1302 $\frac{1}{12}$	$\frac{3125}{3072}$	1,017	381	25
F $\flat$	Quarte vermindert	4 $\flat$	$\frac{32}{25}$	1280	$\frac{128}{125}$	1,024	356	34
E	Terz gross	3	$\frac{5}{4}$	1250	$\frac{25}{24}$	1,041	322	59
E $\flat$	„ klein	3 $\flat$	$\frac{6}{5}$	1200	$\frac{128}{125}$	1,024	263	34
D $\sharp$	Secunde übermässig	2 $\sharp$	$\frac{75}{64}$	1171 $\frac{7}{8}$	$\frac{25}{24}$	1,041	229	59
D	„ gross	2	$\frac{9}{8}$	1125	$\frac{25}{24}$	1,041	170	59
D $\flat$	„ klein	2 $\flat$	$\frac{27}{25}$	1080	$\frac{648}{625}$	1,037	111	52
C $\sharp$	Prime übermässig	1 $\sharp$	$\frac{25}{24}$	1041 $\frac{2}{3}$	$\frac{25}{24}$	1,041	59	59
C	Prime	1	1	1000			0	

Taf. II.**Dur- und Moll-Tonleitern im unveränderten enharmonischen
Tonsysteme.**

Wo Punkte stehen, ist der Ton für das betreffende Intervall rein vorhanden.

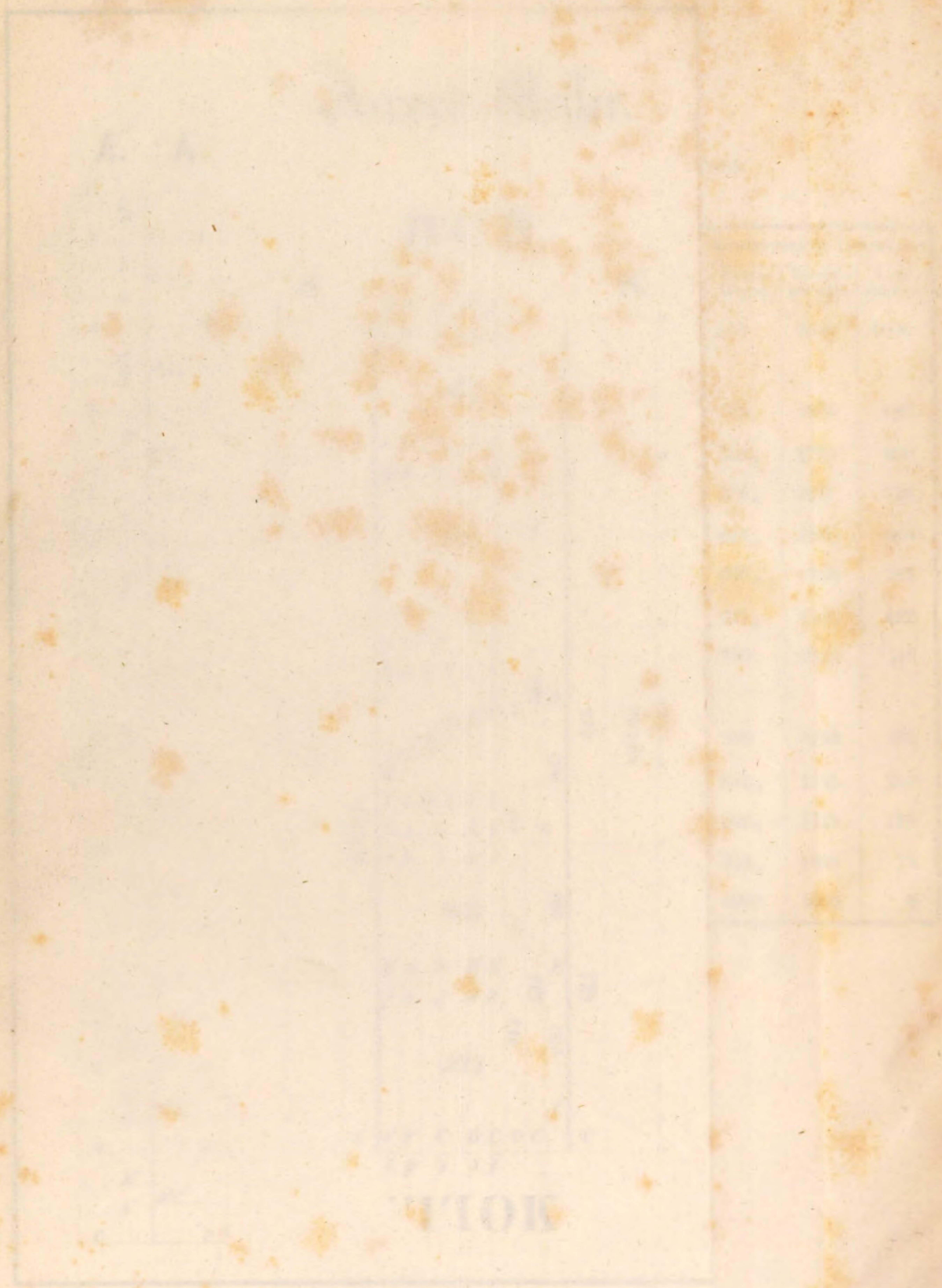
Siehe übrigens §. 81.

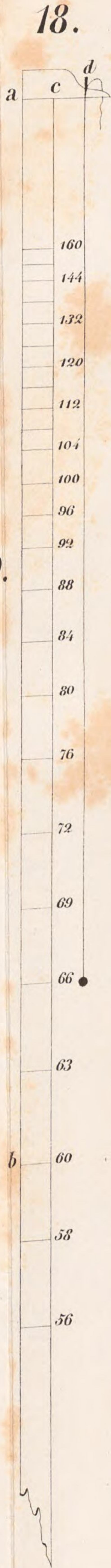
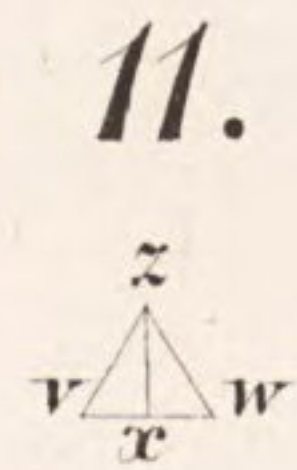
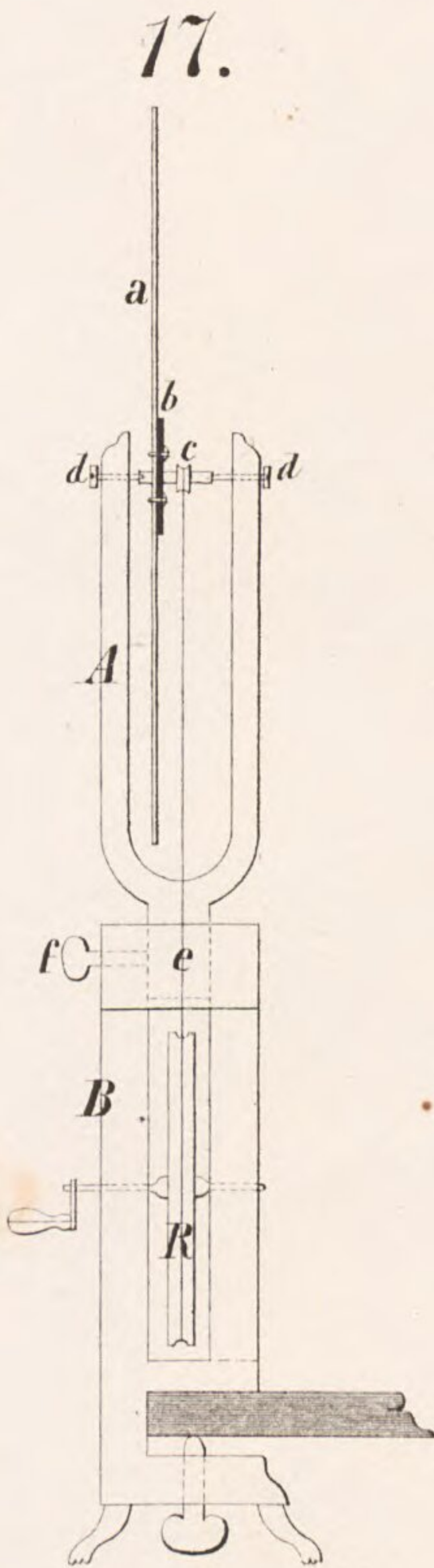
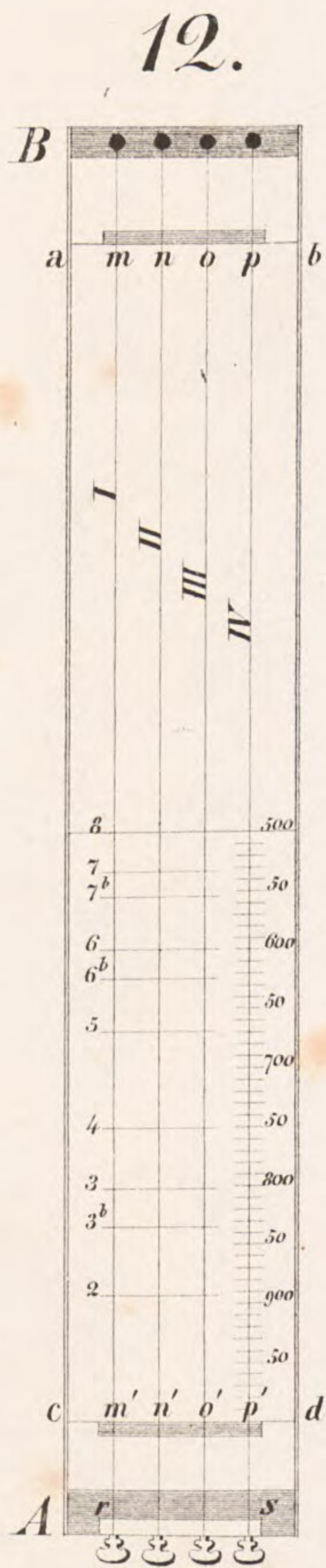
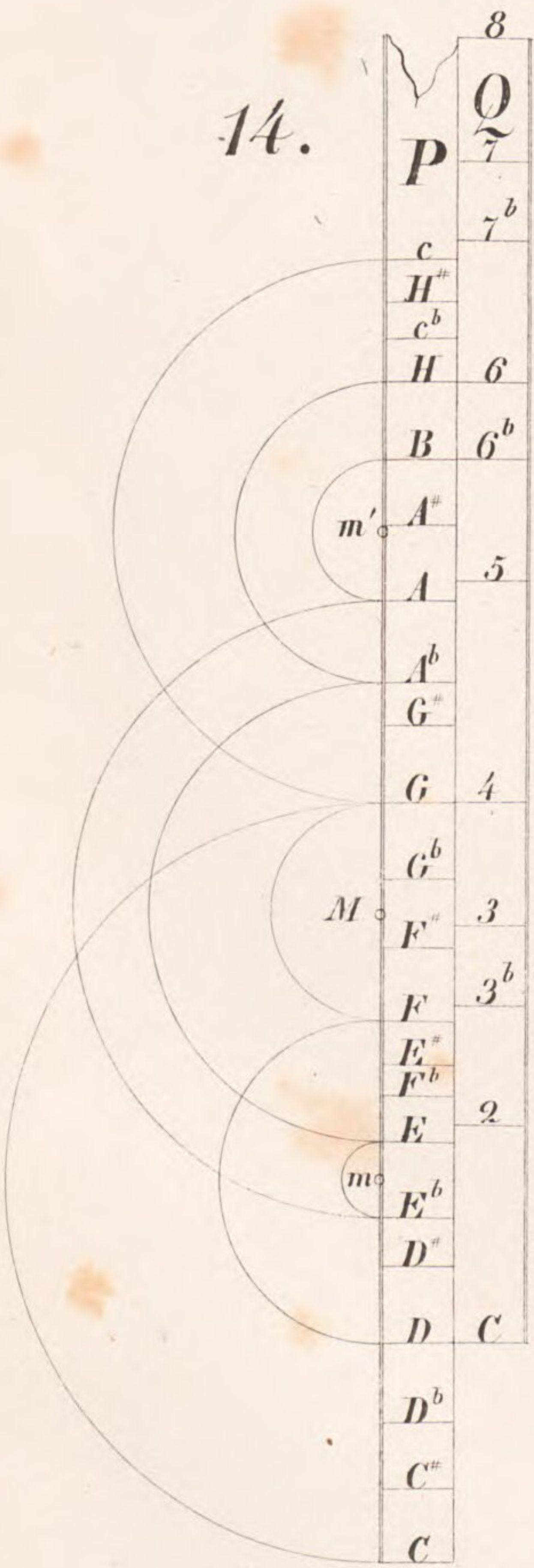
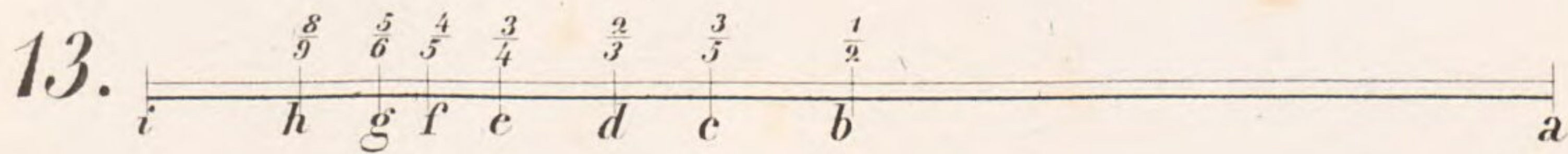
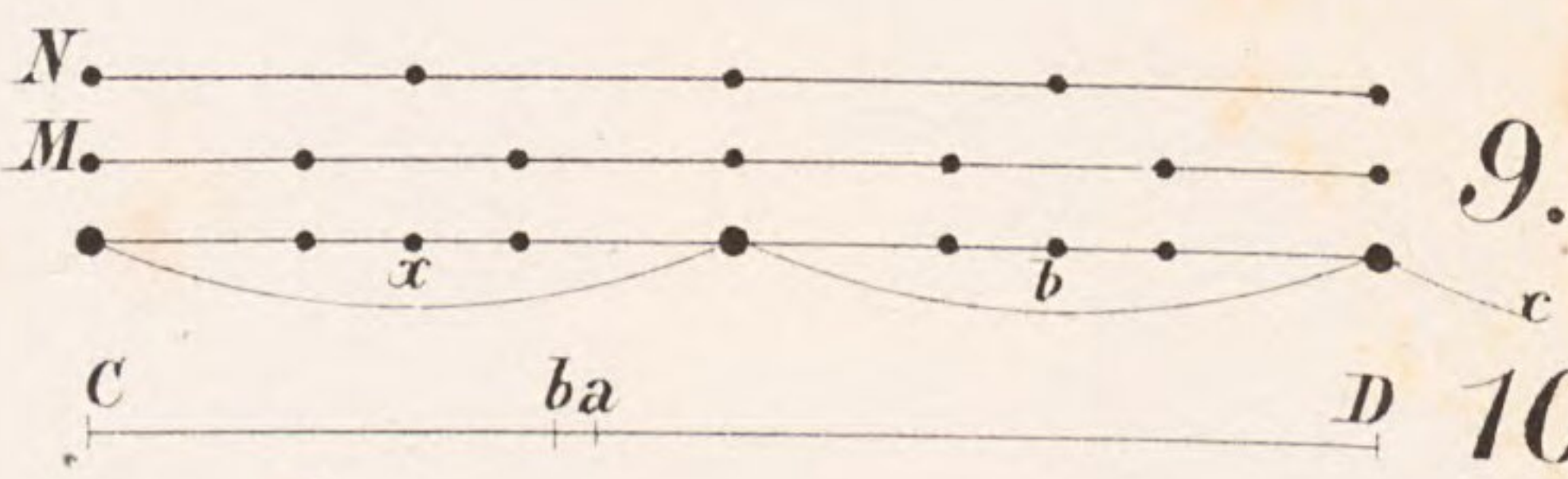
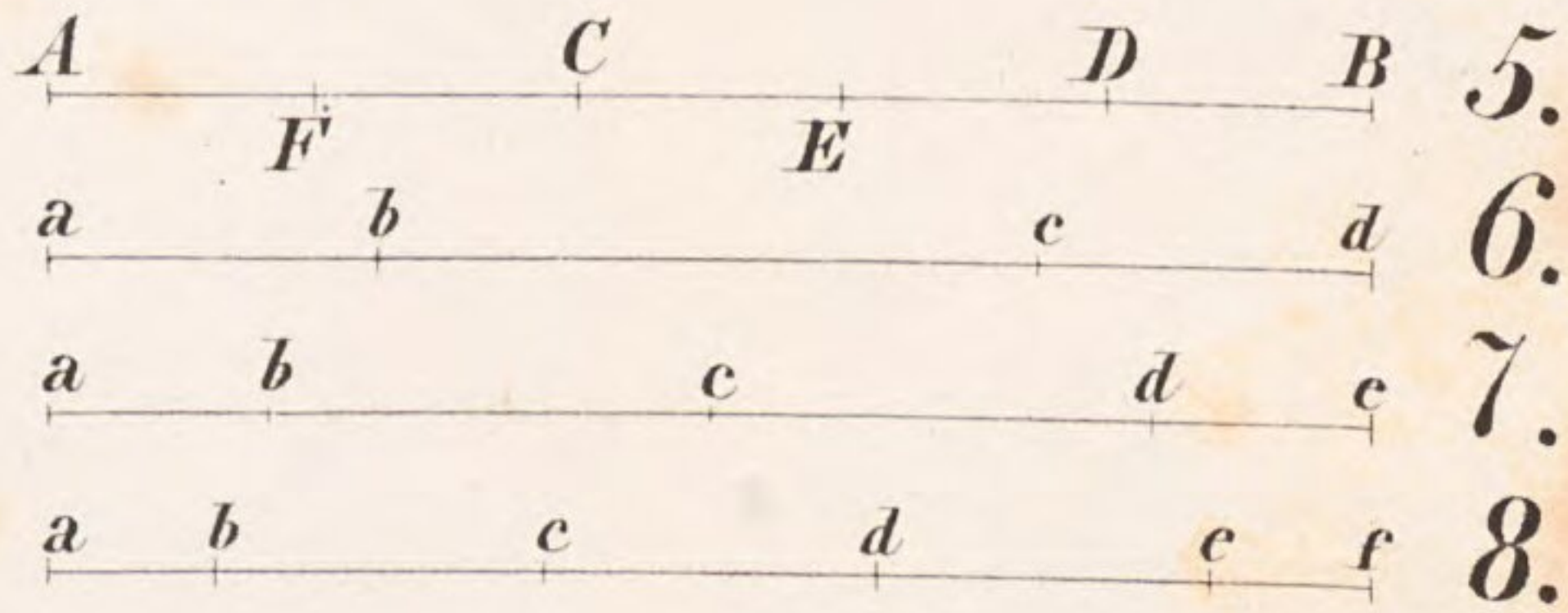
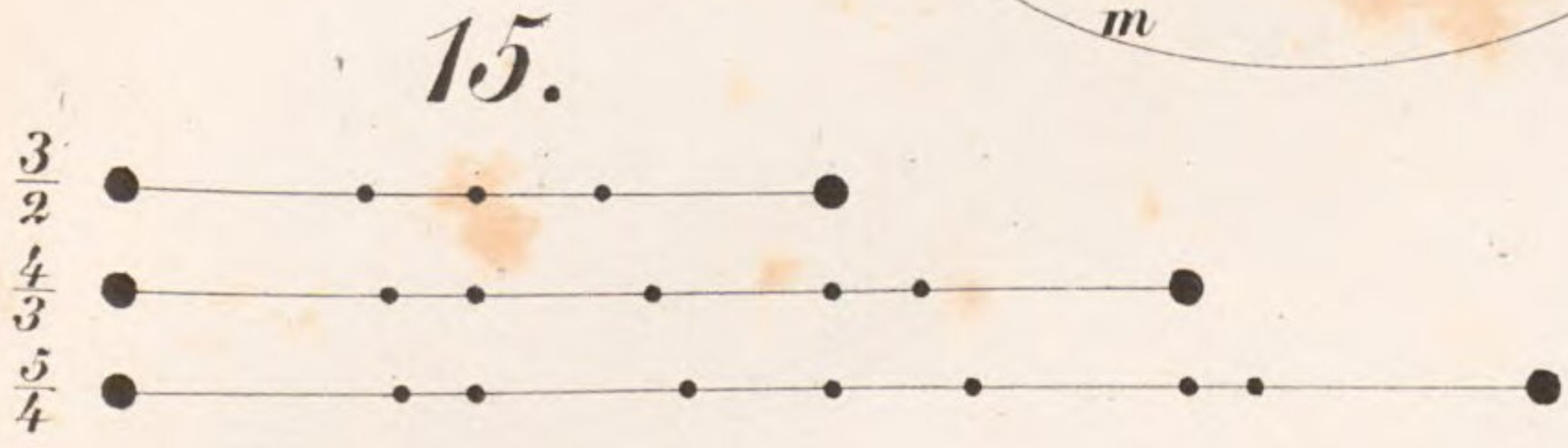
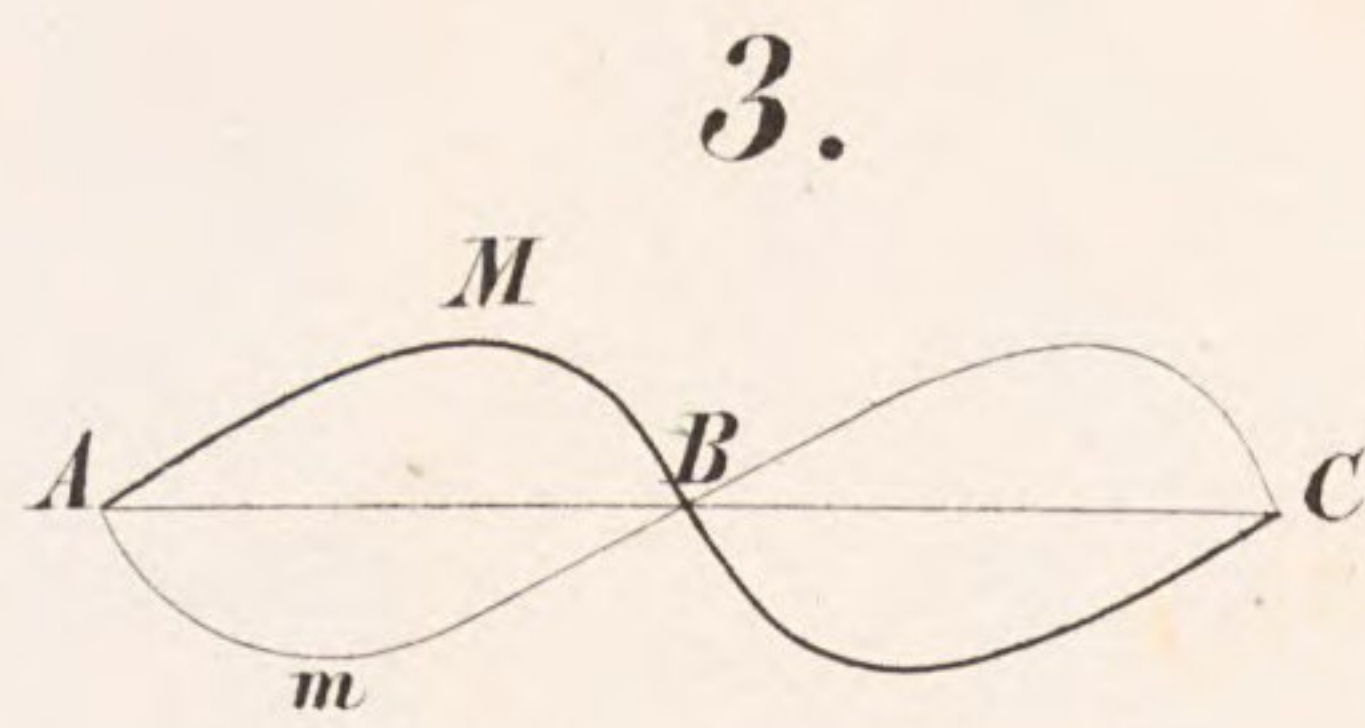
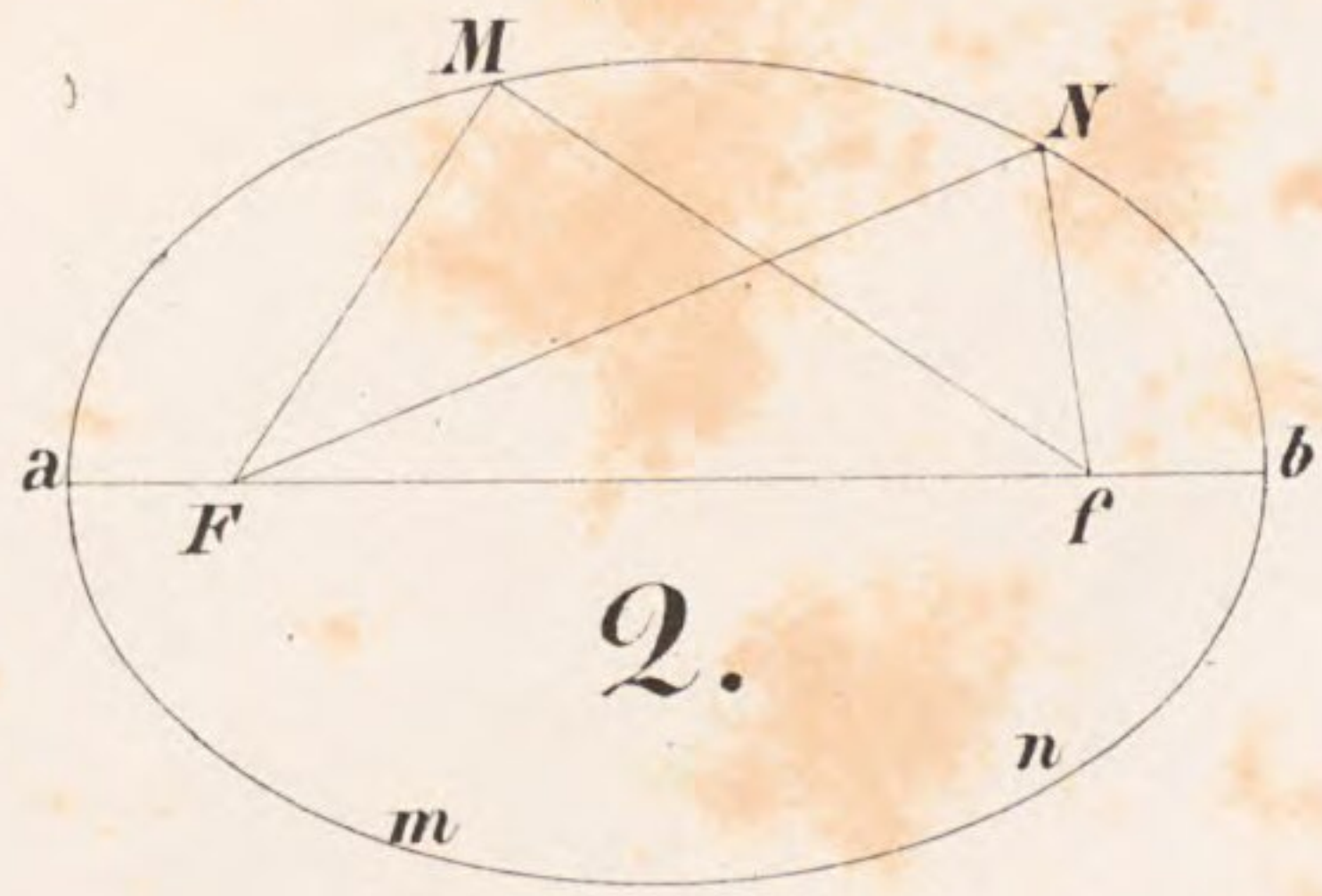
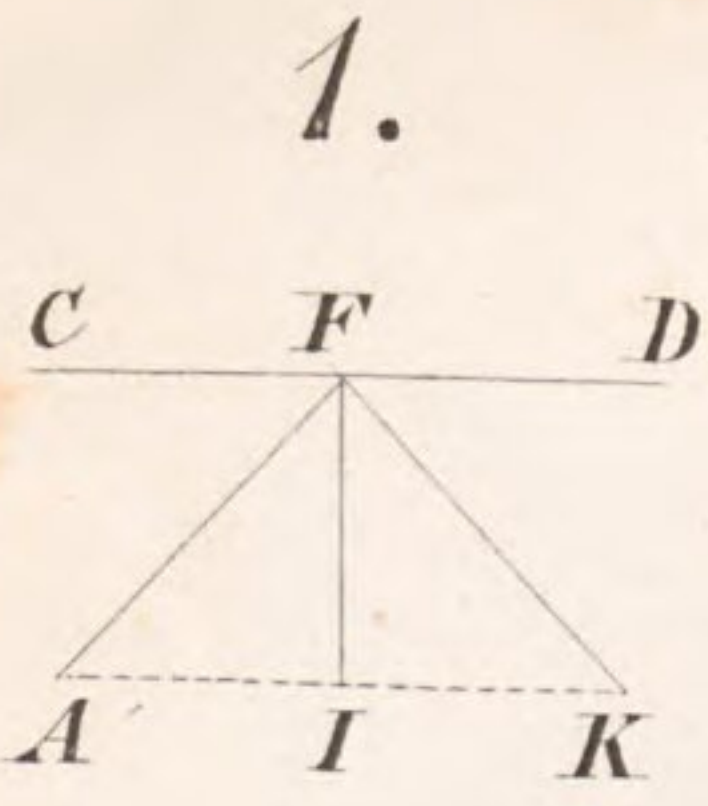
7	.	-18	-18	[*] 25 d ^b	.	.	.	[*] 25 e ^b	.	.	-18	-18	[*] 25 g ^b	.	.	[*] 25 a ^b	-18	-18	.	[*] 25 b
7 ^b	.	-18	-18	-18	.	.	[*] 25 d [#]	.	.	.	-18	-18	-18	.	.	.	-18	-18	[*] 7 a [#]	-18
6	.	.	.	.	.	.	+18	-7	+18	+18	.	.	.	.	.	[*] 7 g ^b	.	.	.	[*] 25 a ^b
6 ^b	.	[*] 7 A [#]	.	.	.	.	[*] 25 c [#]	.	+18	+18	[*] 25 d [#]	.	.	.	.	.	.	.	[*] 25 g [#]	.
5	.	-18	-18	-18	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	-18	-18	.	[*] 25 g ^b
4	.	.	.	.	.	.	[*] 25 A [#]	.	+18	+18	.	.	.	+18	+18	+18	.	.	.	.
3	.	-18	-18	[*] 25 G ^b	.	.	.	[*] 25 A ^b	.	.	.	.	.	.	.	[*] 7 d ^b	.	.	.	[*] 25 e ^b
3 ^b	.	-18	-18	-18	.	.	[*] 25 G [#]	.	.	.	[*] 7 A [#]	.	.	.	.	.	.	.	[*] 25 d [#]	.
2	.	-18	-18	-18	-18	-18	.	[*] 25 G ^b	.	.	-18	-18	-18	.	.	.	-18	-18	.	[*] 25 d ^b
1	C [#]	D ^b	D	D [#]	E ^b	E	F ^b	E [#]	F	F [#]	G ^b	G	G [#]	A ^b	A	A [#]	B	H	c ^b	H [#]

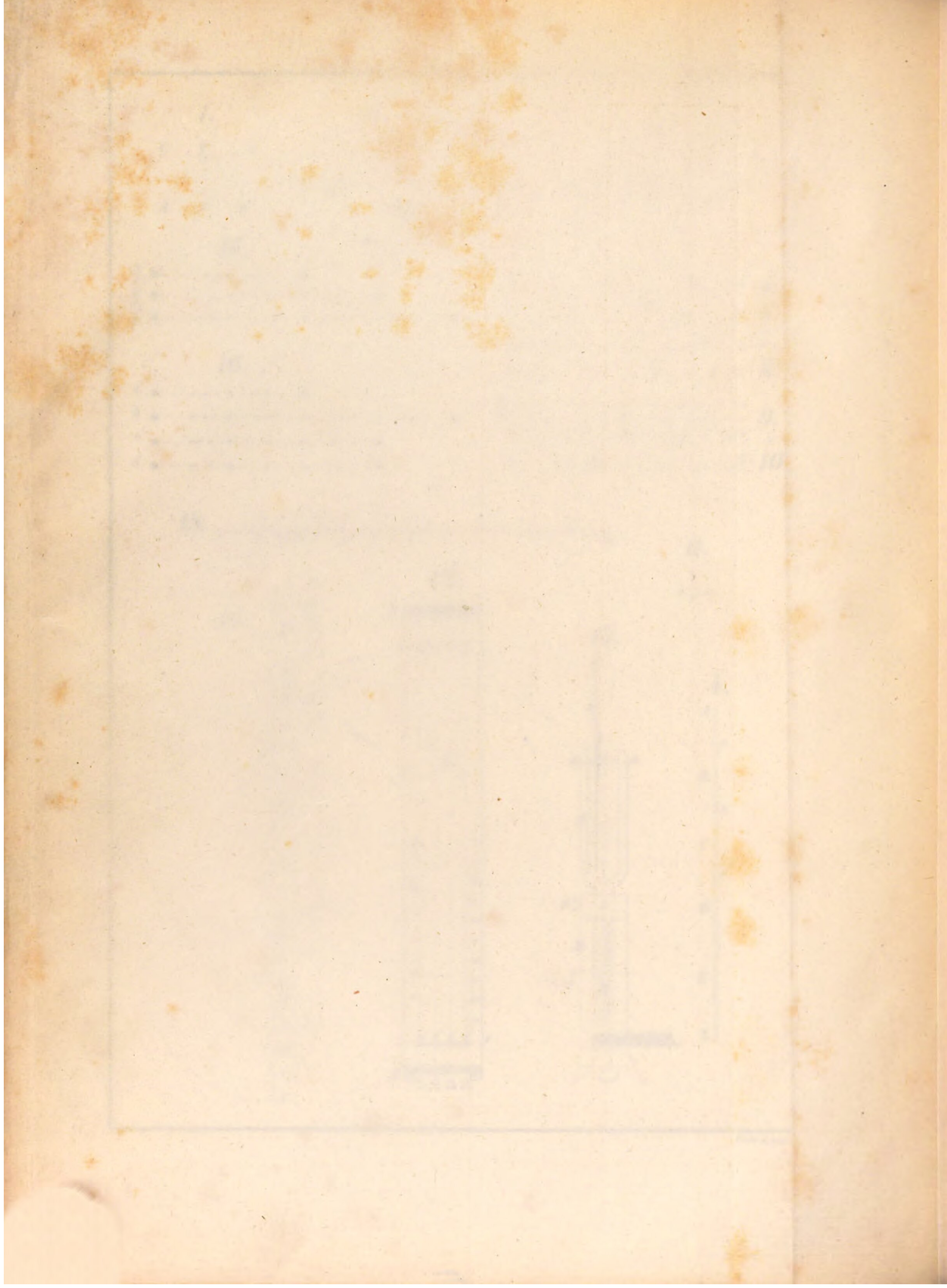
Taf. III.**Vergleichungs-Tafel für die musikalischen Temperaturen.**

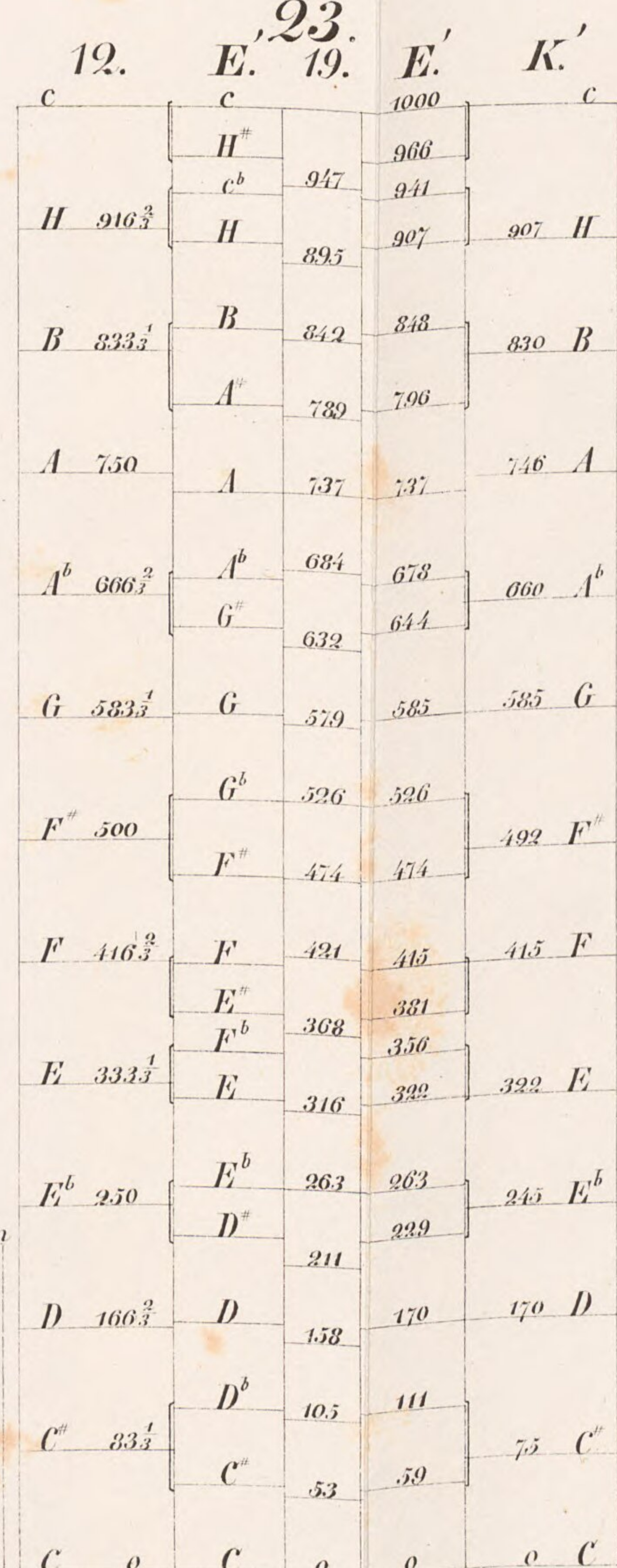
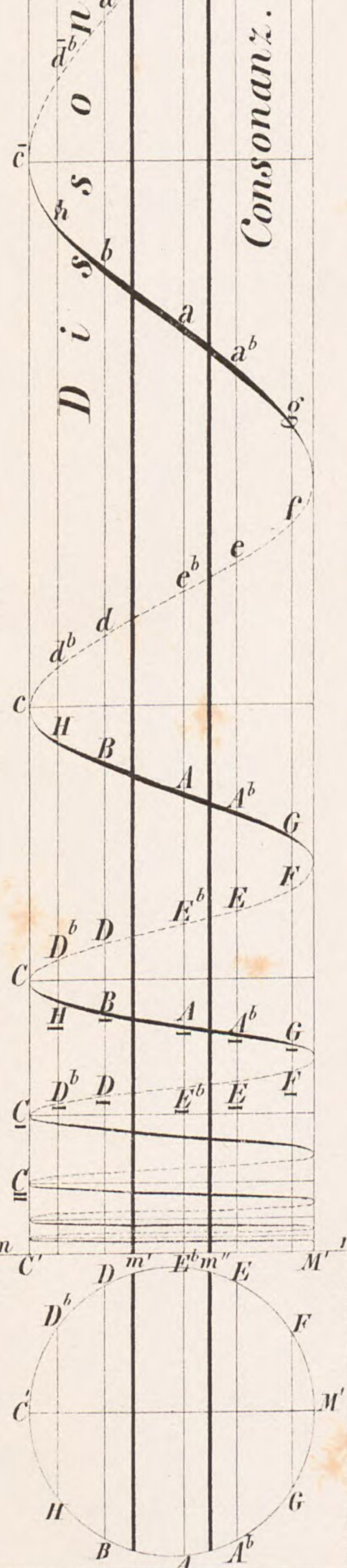
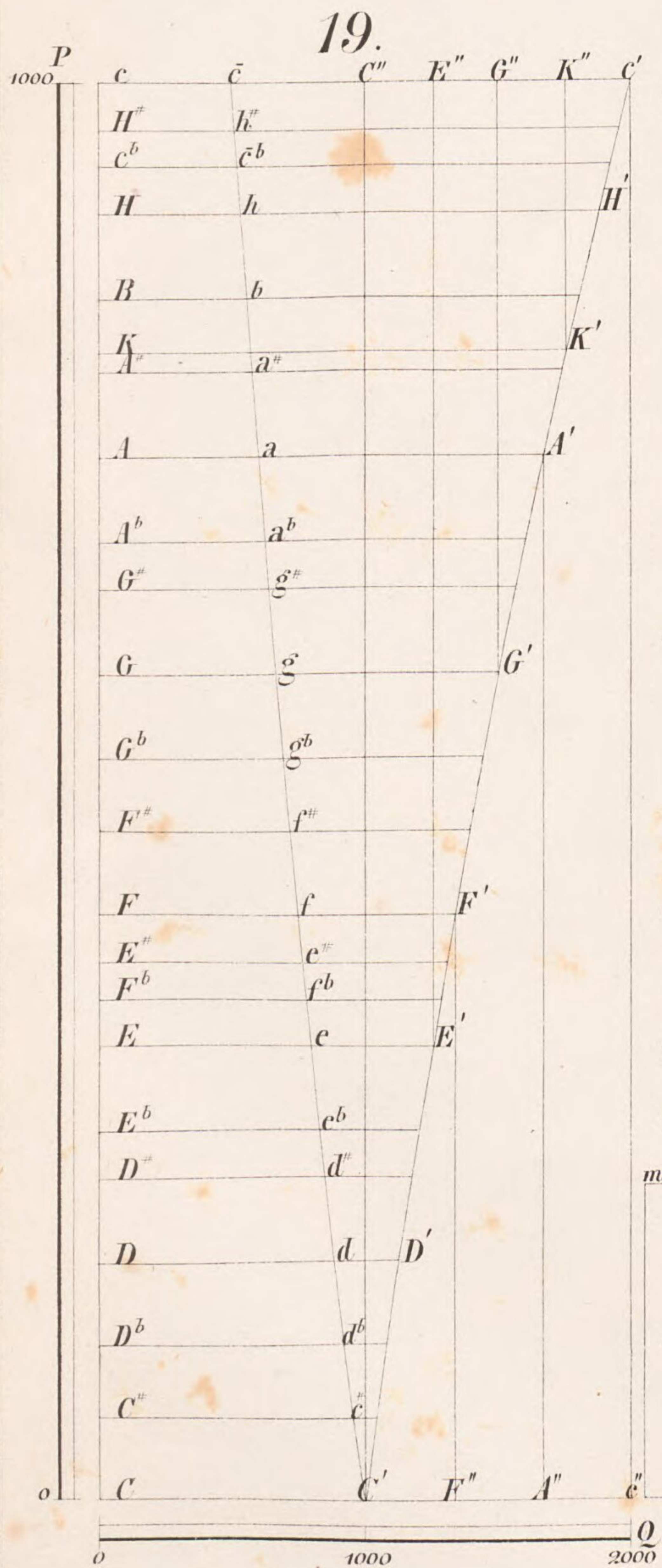
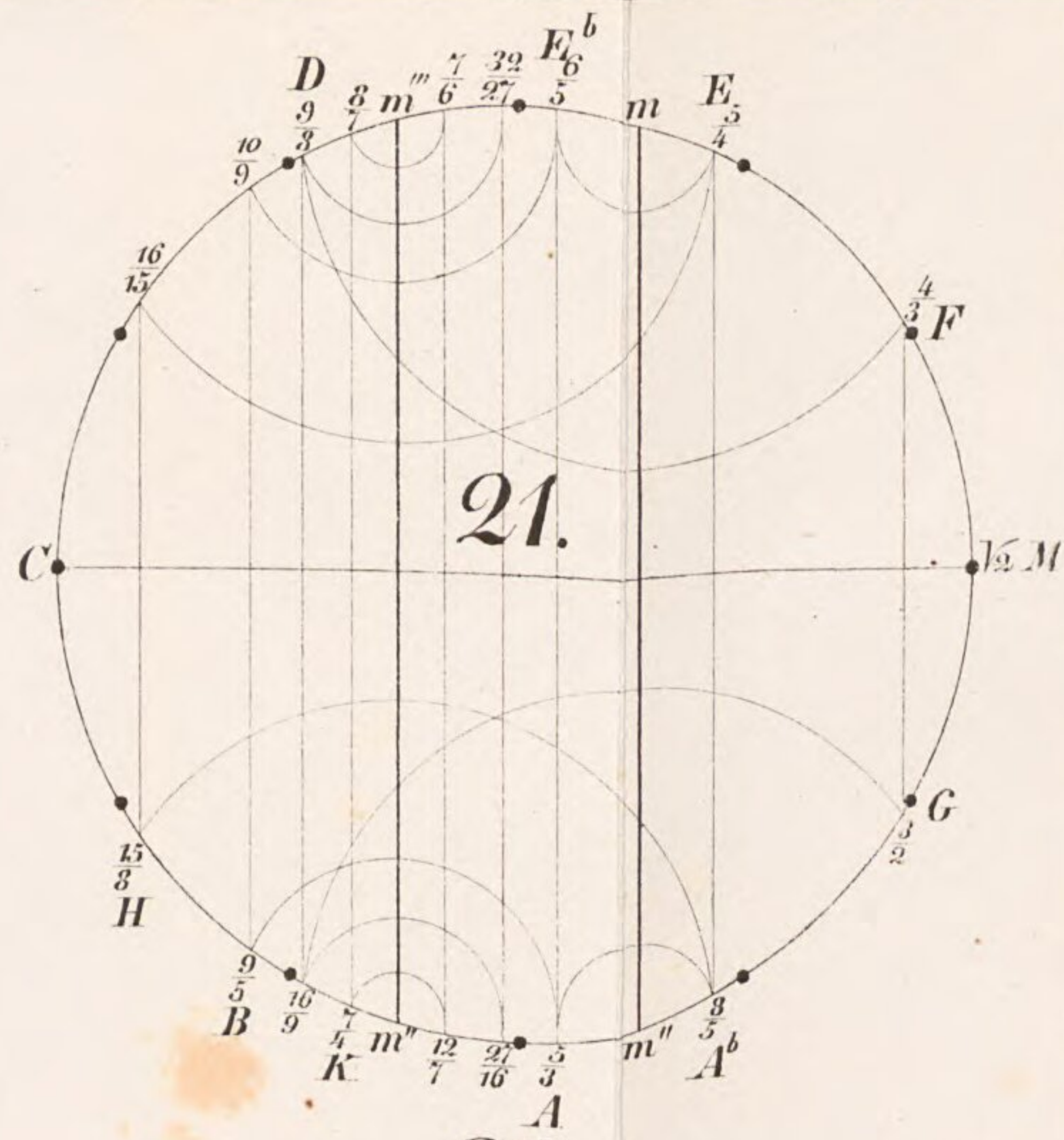
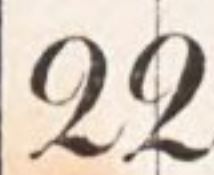
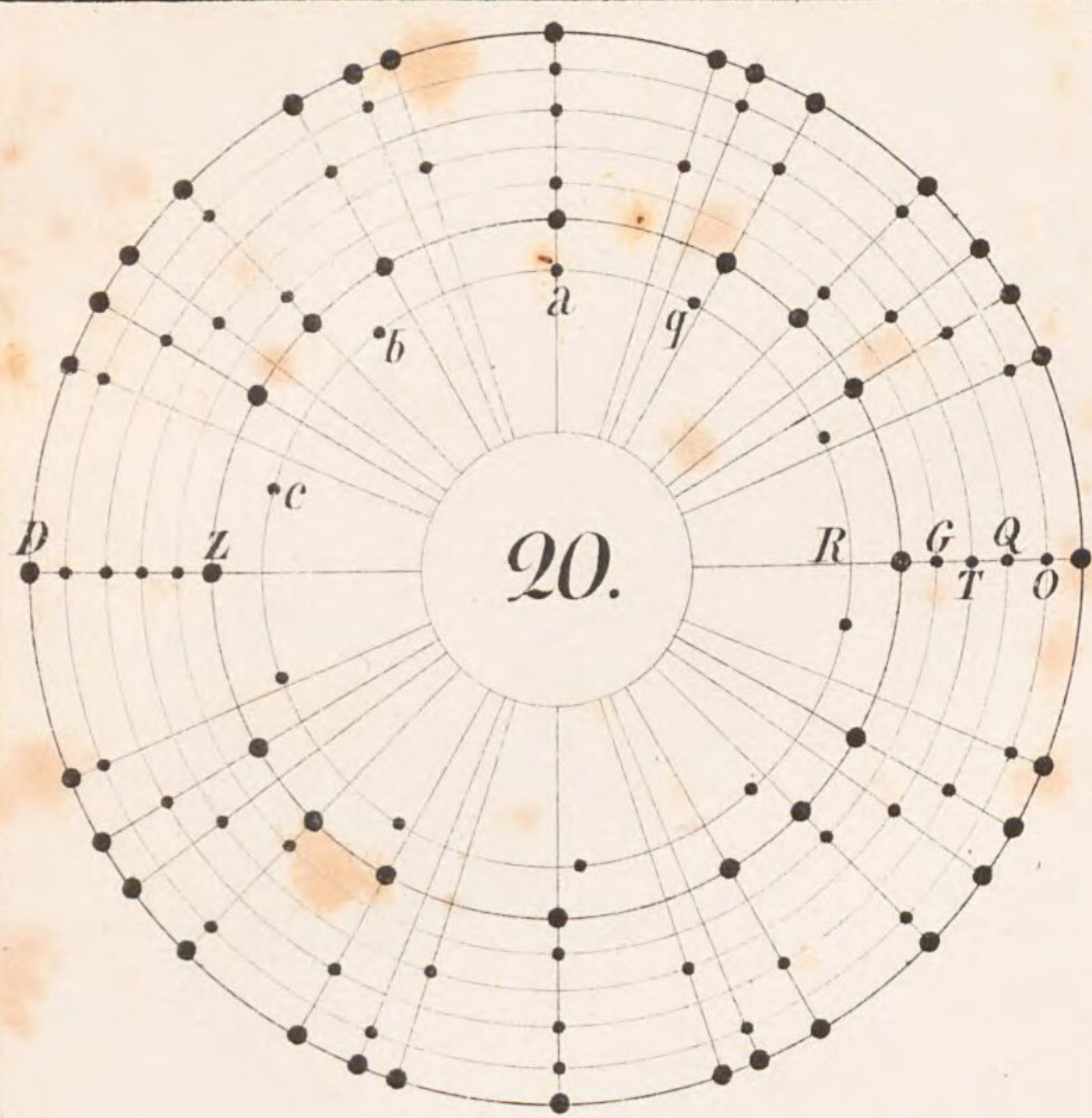
Siehe §. 94 und §. 95.

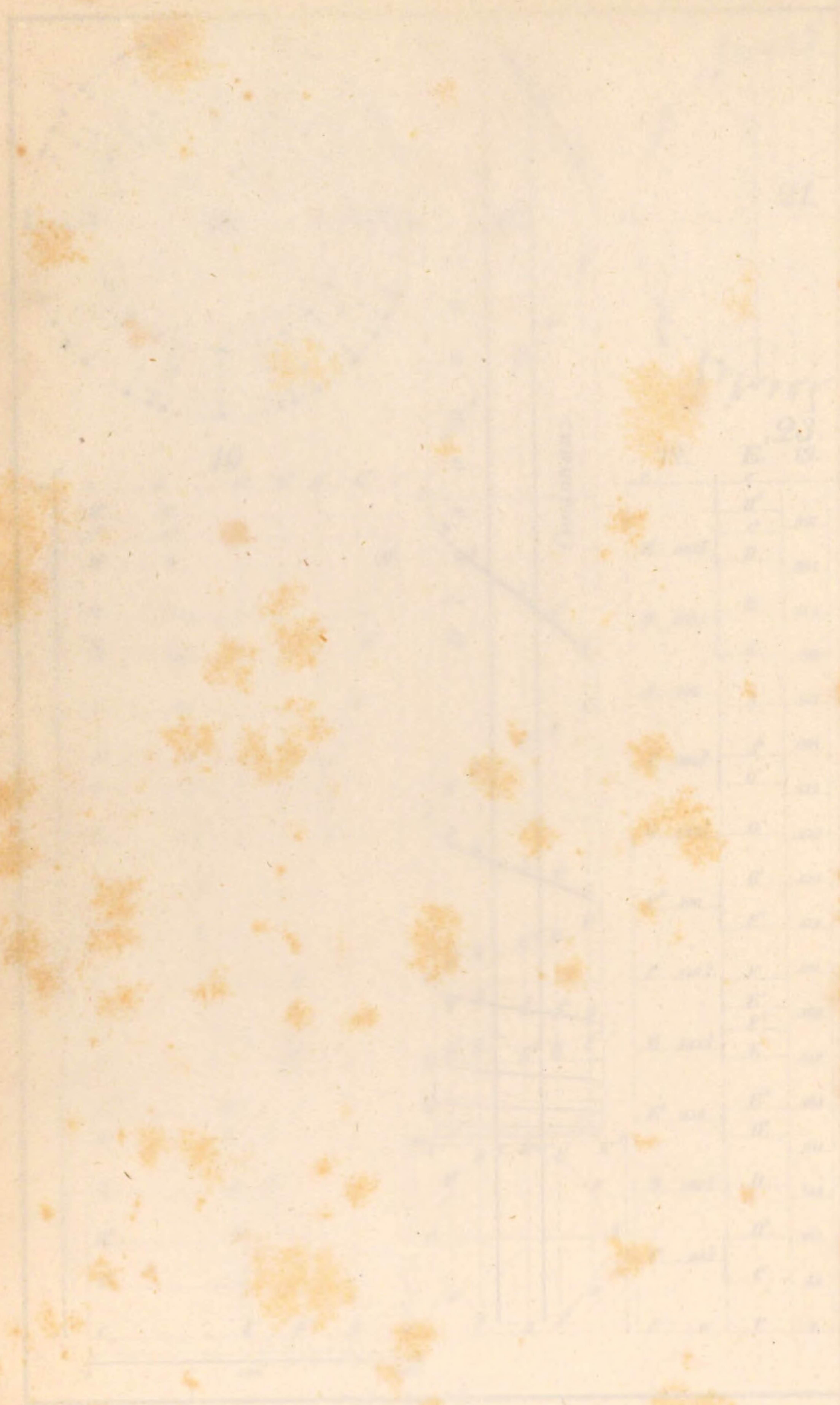
19stufige Temperatur.			Enharmonisches System.				12stufige Temperatur.			Kirnbergersche Temperatur.		
Saiten- längen.	Pulsver- hältnisse.	Loga- rithmen.	Tö- ne.	Saiten- längen.	Pulsver- hältnisse.	Loga- rithmen.	Saiten- längen.	Pulsver- hältnisse.	Loga- rithmen.	Saiten- längen.	Pulsver- hältnisse.	Loga- rithmen.
500	2000	1000	c	500	2000	1000	500	2000	1000	500	2000	1000
518 _{,6}	1928	947	H [♯]	512	1953 $\frac{1}{8}$	966						
537 _{,8}	1859	895	c [♭]	520 $\frac{5}{6}$	1920	941						
557 _{,8}	1793	842	H	533 $\frac{1}{3}$	1875	907	529 _{,7}	1888	916 $\frac{2}{3}$	533 _{,3}	1875	907
578 _{,6}	1728	789	B	555 $\frac{5}{9}$	1800	848	561 _{,2}	1782	833 $\frac{1}{3}$	562 _{,5}	1778	830
600 _{,1}	1667	737	A [♯]	576	1736 $\frac{1}{9}$	796						
622 _{,3}	1607	684	A	600	1666 $\frac{2}{3}$	737	594 _{,6}	1682	750	596 _{,3}	1677	746
645 _{,5}	1549	632	A [♭]	625	1600	678						
669 _{,5}	1494	579	G [♯]	640	1562 $\frac{1}{2}$	644	630	1587	666 $\frac{2}{3}$	632 _{,8}	1580	660
694 _{,3}	1440	526	G	666 $\frac{2}{3}$	1500	585	667 _{,4}	1498	583 $\frac{1}{3}$	666 _{,7}	1500	585
720 _{,1}	1389	474	G [♭]	694 $\frac{4}{9}$	1440	526						
746 _{,9}	1339	421	F [♯]	720	1388 $\frac{8}{9}$	474	707 _{,1}	1414	500	711 _{,1}	1406	492
			F	750	1333 $\frac{1}{3}$	415	749 _{,1}	1335	416 $\frac{2}{3}$	750	1333	415
774 _{,6}	1291	368	E [♯]	768	1302 $\frac{1}{12}$	381						
			F [♭]	781 $\frac{1}{4}$	1280	356						
803 _{,4}	1245	316	E	800	1250	322	793 _{,7}	1260	333 $\frac{1}{3}$	800	1250	322
833 _{,3}	1200	263	E [♭]	833 $\frac{1}{3}$	1200	263						
864 _{,2}	1157	211	D [♯]	853 $\frac{1}{3}$	1171 $\frac{7}{8}$	229	840 _{,9}	1189	250	843 _{,7}	1185	245
896 _{,3}	1116	158	D	888 $\frac{8}{9}$	1125	170	890 _{,9}	1122	166 $\frac{2}{3}$	888 _{,9}	1125	170
929 _{,6}	1076	105	D [♭]	925 $\frac{2}{27}$	1080	111						
964 _{,2}	1037	53	C [♯]	960	1041 $\frac{2}{3}$	59	943 _{,9}	1059	83 $\frac{1}{3}$	949 _{,2}	1053	75
1000	1000	0	C	1000	1000	0	1000	1000	0	1000	1000	0

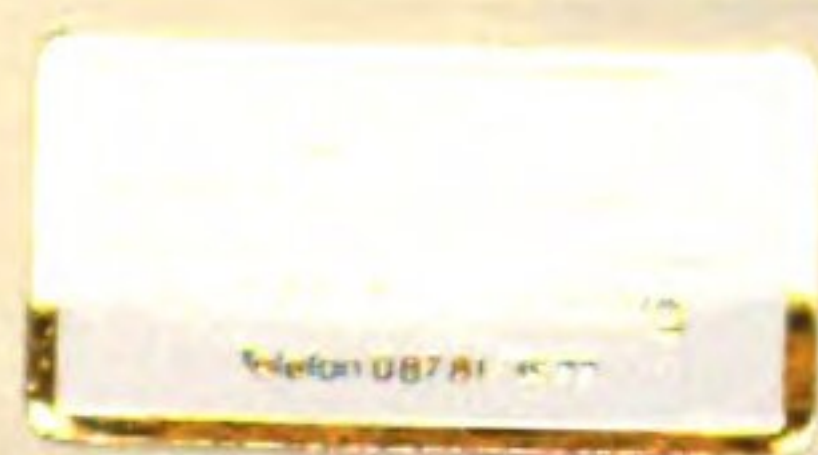












3/02



